



# **PROJETO DE GRADUAÇÃO**

**Caracterização experimental do número de  
onda em metamateriais estruturais**

Por,

**Pedro Henrique de Melo Casado Matos**

**Brasília, 5 de julho de 2018**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

## PROJETO DE GRADUAÇÃO

### **Caracterização experimental do número de onda em metamateriais estruturais**

Por,

**Pedro Henrique de Melo Casado Matos**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico

#### **Banca Examinadora**

Prof. Adriano Todorovic Fabro, ENM/FT (Orientador) \_\_\_\_\_

Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes, ENM/FT \_\_\_\_\_

Prof. Sérgio Henrique da Silva Carneiro, FGA \_\_\_\_\_

Brasília 5 de julho de 2018

# Resumo

Metamateriais são estruturas periódicas que vem ganhando espaço no controle de vibrações e ruído dada a sua capacidade de atenuação de vibração para certas bandas de frequência. Diversas são suas aplicações no controle passivo de vibrações e ruídos na indústria automotiva e aeroespacial, isolamento acústico, e em estruturas em geral. Dada sua complexa geometria, os metamateriais estruturais são de difícil fabricação, mas com o avanço de técnicas de fabricação em manufatura aditiva a construção de dispositivos funcionais foi viabilizada, permitindo expandir e facilitar a utilização dessa estrutura. Um dos desafios é a caracterização experimental dessas estruturas em termos de variáveis de propagação de ondas, onde somente alguns métodos estão disponíveis e todos possuem alguma limitação. O presente trabalho tem como objetivo aplicar e estudar diferentes métodos de determinar as curvas de dispersão de forma experimental para alguns tipos de viga. Os métodos utilizados no trabalho inclui o método dos três pontos, o método via obtenção da frequência espacial por transformada de Fourier e o método da correlação 1D. Todos apresentaram bons resultados e evidenciaram a influência dos ressonadores na curva de dispersão em uma estrutura de metamaterial.

**Palavras-chaves:** Metamaterial, Propagação de onda, Controle de ruído, Experimental, Número de onda.

# Abstract

Metamaterials are periodic structures which are becoming more relevant in applications for noise and vibration control. It can attenuate wave propagation for certain frequency bands caused by resonators periodically distributed along its structure. It can be used for acoustic isolation, vibration attenuation in structures and many other applications. However, it is still a challenge to determine its wave propagation characteristics experimentally. The present work shows some methods to determine dispersion curves using the frequency domain obtained experimentally through a transducer and an acquisition software. Further discussions about its limitations and capabilities are made.

**Key-words:** Wave propagation, Metamaterials, Dispersion Curves, Experimentally, Noise control.

# Lista de Figuras

Figura 1.1 – Comparação da aceleração de transferência entre duas vigas, uma sem e outra com ressonadores. . . . .	2
Figura 2.1 – Analogia entre as frequências angular e espacial (FAHY; GARDONIO, 2007). . . . .	5
Figura 2.2 – Comparação entre as curvas de dispersão para uma viga de metamaterial e para uma viga simples. . . . .	6
Figura 2.3 – Elemento infinitesimal de uma viga em flexão (RAO, 2010) . . . . .	7
Figura 2.4 – Janela exponencial. . . . .	13
Figura 2.5 – Janela força. . . . .	13
Figura 2.6 – Sinal analógico contínuo sendo convertido para um sinal digital discreto. . . . .	15
Figura 2.7 – A alta frequência do sinal analógico não é detectada pelo sinal discretizado. . . . .	15
Figura 3.1 – Montagem do experimento (HINKE, 2004) . . . . .	16
Figura 3.2 – Exemplo de aplicação do método da FRF, aquisição dos sinais no tempo. . . . .	18
Figura 3.3 – Determinação das FRFs e utilização da relação 3.7 para determinar o número de onda. . . . .	18
Figura 3.4 – ODS normalizada de uma estrutura de metamaterial para cada frequência. . . . .	19
Figura 3.5 – ODS da viga para uma dada frequência (superior), espectro em frequência espacial obtido via RDFS (central) e via FFT (inferior). . . . .	20
Figura 4.1 – Malha de elemento finitos utilizada para a simulação numérica. . . . .	23
Figura 4.2 – Curva de dispersão em um ponto $x_2 = 250 \text{ mm}$ e distância entre os demais pontos $d = 60 \text{ mm}$ para a viga livre-livre. . . . .	24
Figura 4.3 – Curva de dispersão em um ponto $x_2 = 250 \text{ mm}$ e distância entre os demais pontos $d = 60 \text{ mm}$ para a viga engastada. . . . .	24
Figura 4.4 – Curva de dispersão em um ponto $x_2 = 240 \text{ mm}$ e distância entre os demais pontos $d = 10 \text{ mm}$ para a viga engastada. . . . .	24
Figura 4.5 – Curvas de dispersão com e sem RDFS para um $a = 1.5$ . . . . .	25

Figura 4.6 – Erro percentual para cada frequência em comparação á curva analítica com e sem RDFS para $a = 1.5$ . O erro médio com RDFS é de 10.56 % e sem 9.52 %.	25
Figura 4.7 – Curvas de dispersão com e sem RDFS para um $a = 2.5$ .	26
Figura 4.8 – Erro percentual para cada frequência em comparação á curva analítica com e sem RDFS para $a = 2.5$ . O erro médio com RDFS é de 10.44 % e sem 9.52 %.	26
Figura 4.9 – Primeiros modos de vibração de uma viga.	27
Figura 4.10–Sinal de deslocamento no tempo de um ponto qualquer do modelo analítico com a adição do ruído.	27
Figura 4.11–Deslocamento ao longo da viga de modelo analítico sujeita à um impulso unitário. Os pontos adquiridos estão representados como as linhas verticais, $x_1$ , $x_2$ e $x_3$ respectivamente.	28
Figura 4.12–Curva de dispersão sem o tratamento de sinal.	28
Figura 4.13–Curva de dispersão com o tratamento de sinal.	29
Figura 4.14–Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas. As FRFs foram retiradas dos pontos $x_2 = 240 \text{ mm}$ , $d = 60 \text{ mm}$ .	29
Figura 4.15–Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas. As FRFs foram retiradas dos pontos $x_2 = 240 \text{ mm}$ , $d = 10 \text{ mm}$ .	30
Figura 4.16–Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas. As FRFs foram retiradas dos pontos $x_2 = 250 \text{ mm}$ , $d = 30 \text{ mm}$ .	30
Figura 4.17–Curva de dispersão obtida a partir da Eq. 2.32	31
Figura 4.18–Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas para viga com ressonadores. As FRFs foram retiradas do ponto central $x_2 = 180 \text{ mm}$ com distância $d = 30 \text{ mm}$ dos demais pontos.	31
Figura 4.19–Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas para viga com ressonadores. As FRFs foram retiradas do ponto $x_2 = 220 \text{ mm}$ com distância $d = 30 \text{ mm}$ dos demais pontos.	32
Figura 4.20–Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas para viga com ressonadores. As FRFs foram retiradas dos pontos $x_2 = 190 \text{ mm}$ e $d = 20 \text{ mm}$ .	32
Figura 4.21– <i>Set-up</i> experimental para a viga engastada.	34
Figura 4.22–Típica amplitude da FRF para a viga engastada para um dos pontos medidos.	35
Figura 4.23–Típica função de coerência para a viga engastada para um dos pontos medidos.	35
Figura 4.24–Curva de dispersão via método dos três pontos com ponto central $x_2 = 70 \text{ mm}$ e $d = 30 \text{ mm}$ para a viga engastada.	35

Figura 4.25–Curva de dispersão via método dos três pontos com ponto central $x_2$ = 130mm e $d = 60\text{ mm}$ para a viga engastada. . . . .	36
Figura 4.26– <i>Set-up</i> experimental para a viga livre-livre. . . . .	37
Figura 4.27–Função resposta em frequência para a viga livre-livre, medida em um dos pontos de aquisição. . . . .	37
Figura 4.28–Função de coerência para a FRF representada na figura 4.27. . . . .	38
Figura 4.29–Curva de dispersão via método dos três pontos com ponto central $x_2$ = 220mm e $d = 40\text{ mm}$ para a viga livre-livre. . . . .	38
Figura 4.30–Curva de dispersão via método dos três pontos com ponto central $x_2$ = 180mm e $d = 60\text{ mm}$ para a viga livre-livre. . . . .	38
Figura 4.31–Curva de dispersão via método dos três pontos com ponto central $x_2$ = 280 mm e $d = 80\text{ mm}$ para a viga livre-livre. . . . .	39
Figura 4.32–Curva de dispersão via Transformada de Fourier da ODS sem a utili- zação da RDFS para a viga livre-livre. . . . .	39
Figura 4.33–Curva de dispersão via Transformada de Fourier da ODS com a utili- zação da RDFS para a viga livre-livre. . . . .	39
Figura 4.34– <i>Set-up</i> experimental preliminar para as vigas de poliamida. . . . .	40
Figura 4.35–Função resposta em frequência para a viga de perfil I, medida em um dos pontos . . . . .	41
Figura 4.36–Função de coerência para a FRF da figura 4.35. . . . .	41
Figura 4.37–Curva de dispersão via método dos três pontos e ajuste paramétrico para o ponto central $x_2 = 99\text{ mm}$ e $d = 66\text{ mm}$ para a viga em I. . . . .	41
Figura 4.38–Curva de dispersão para a viga em I via método da Transformada de Fourier da ODS sem a implementação da RDFS. . . . .	42
Figura 4.39–Curva de dispersão para a viga em I via método da Transformada de Fourier da ODS com a implementação da RDFS. . . . .	42
Figura 4.40– <i>Set-up</i> experimental final utilizado no experimento com as vigas de poliamida. . . . .	43
Figura 4.41–Curva de dispersão obtida pelo método dos três pontos obtida à partir do ponto central $x_2 = 132\text{mm}$ com espaçamento $dx = 55\text{mm}$ entre os demais pontos. . . . .	44
Figura 4.42–Curva de dispersão obtida pelo método dos três pontos obtida à partir do ponto central $x_2 = 154\text{mm}$ com espaçamento $dx = 55\text{mm}$ entre os demais pontos. . . . .	44
Figura 4.43–Curva de dispersão experimental obtida via Transformada de Fourier da ODS. . . . .	45
Figura 4.44–Curva de dispersão experimental obtida via correlação. . . . .	45
Figura 4.45–Parte real (cima) e imaginária da curva de dispersão para a viga de material, utilizando a FRF dos pontos $x_2 = 121\text{ mm}$ e $d = 44\text{ mm}$ com os dados da simulação numérica. . . . .	46

Figura 4.46–Função resposta em frequência em um dos pontos da viga de metamaterial. . . . .	46
Figura 4.47–Função de coerência para a FRF da figura 4.46. . . . .	47
Figura 4.48–Comparação entre a curva de dispersão obtida via o método dos três pontos e o método da FFT da ODS com os dados da simulação numérica. . . . .	47
Figura 4.49–Curva de dispersão para a viga de metamaterial, utilizando a FRF dos pontos $x_2 = 77 \text{ mm}$ e $d = 44 \text{ mm}$ . . . . .	47
Figura 4.50–Curva de dispersão para a viga de metamaterial, utilizando a FRF dos pontos $x_2 = 99 \text{ mm}$ e $d = 44 \text{ mm}$ . . . . .	48
Figura 4.51–Curva de dispersão para a viga de metamaterial, utilizando a FRF dos pontos $x_2 = 121 \text{ mm}$ e $d = 44 \text{ mm}$ . . . . .	48
Figura 4.52–Curva de dispersão sem a utilização da RDFS. . . . .	48
Figura 4.53–Comparação entre as curvas de dispersão experimental via FFT da ODS com RDFS e a numérica via FRF e ajuste paramétrico da Eq. 3.7. . . . .	49
Figura 4.54–Curva de dispersão obtida via técnica dos três pontos a partir do ponto central $x_2 = 110\text{mm}$ com distância de $d = 33\text{mm}$ entre os demais. Foi utilizada uma espuma mais rígida e a excitação aplicada no ponto $x_f = 55\text{mm}$ . . . . .	49
Figura 4.55–Curva de dispersão obtida via técnica dos três pontos a partir do ponto $x_2 = 110\text{mm}$ com distância de $d = 44\text{mm}$ entre os demais. As condições do experimento foram as mesmas da Fig. 4.54. . . . .	50
Figura 4.56–Curva de dispersão obtida via técnica dos três pontos a partir do ponto central $x_2 = 176\text{mm}$ com distância de $d = 55\text{mm}$ entre os demais. As condições do experimento foram as mesmas da Fig. 4.54. . . . .	50
Figura 4.57–Curva de dispersão obtida via técnica dos três pontos a partir do ponto central $x_2 = 187\text{mm}$ com distância de $d = 44\text{mm}$ entre os demais. Foi utilizada uma espuma menos rígida com menor amortecimento, e ponto de aplicação do forçamento foi em $x_f = 55\text{mm}$ . . . . .	51
Figura 4.58–Curva de dispersão obtida via técnica dos três pontos a partir do ponto central $x_1 = 99\text{mm}$ com distância de $d = 55\text{mm}$ entre os demais. Foi utilizada uma espuma menos amortecida com ponto de aplicação da força em $x_f = 11\text{mm}$ . . . . .	51
Figura 4.59–Curva de dispersão experimental obtida via FFT da ODS. . . . .	52
Figura 4.60–Curva de dispersão experimental obtida via correlação. . . . .	52
Figura 4.3 – Curva de dispersão em um ponto $x_2 = 250 \text{ mm}$ e distância entre os demais pontos $d = 60 \text{ mm}$ para a viga engastada. . . . .	54
Figura 4.31–Curva de dispersão em um ponto $x_2 = 280 \text{ mm}$ e distância entre os demais pontos $d = 80 \text{ mm}$ para a viga livre-livre. . . . .	54
Figura 5.1 – Influência do ponto central de medição e da distância entre os demais pontos para o método da FRF. . . . .	55
Figura 5.2 – Influência da FRF do ponto central e da relação $\cos(kd)$ . . . . .	56



Figura 5.3 – Comparação entre as duas espumas utilizadas para realizar o experi- mento. . . . .	57
Figura 5.4 – Influência da espuma na FRF da estrutura. . . . .	58
Figura B.1 – Amplitudes de ondas em uma viga. . . . .	67
Figura B.2 – Ondas geradas por um forçamento harmônico aplicado a uma viga. . .	68
Figura B.3 – Condições de contorno. . . . .	69
Figura B.4 – Modelo das ondas presentes em uma estrutura. . . . .	70
Figura B.5 – Receptância de entrada para uma viga engastada-livre, obtida via aná- lise de propagação de ondas. . . . .	72

# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Propriedades geométricas utilizadas na simulação . . . . .	23
Tabela 2 – Especificação dos instrumentos utilizados nos experimentos. . . . .	33
Tabela 3 – Propriedades das vigas utilizadas no experimento. . . . .	33
Tabela 4 – Especificação da instrumentação. . . . .	43

# Lista de abreviaturas e siglas

FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
UnB	Universidade de Brasília
RMS	<i>Root mean square</i>
NI	<i>National Instruments</i>
FRF	Função Resposta em Frequência
RDFS	<i>Regressive Discrete Fourier Transform</i>
ODS	<i>Operation Deflection Shape</i>
DEP	Densidade Espectral de Potência

# Lista de símbolos

## Símbolos Latinos

$A$	Área	$[m^2]$
$t$	Tempo	$[s]$
$f$	Frequência	$[s^{-1}]$
$k$	Número de onda	$[m^{-1}]$
$m$	Massa	$[kg]$
$V$	Tensão	$[V]$
$I$	Corrente	$[A]$
$u$	Deslocamento	$[m]$
$M$	Momento fletor	$[N.m]$
$V$	Esforço cortante	$[N]$
$E$	Módulo de elasticidade	$[GPa]$
$I$	Momento de inércia	$[m^4]$
$H$	Função resposta em frequência	$[\frac{m}{N}]$
$S( )$	Função espectro	

## Símbolos Gregos

$\rho$	Massa específica	$[kg/m^3]$
$\tau$	Intervalo de tempo	$[s]$
$\phi$	Função Modal	

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Motivação</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>3</b>
<b>1.3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO TEÓRICA</b>	<b>4</b>
<b>2.1</b>	<b>Propagação de Ondas</b>	<b>4</b>
<b>2.2</b>	<b>Equação da viga</b>	<b>6</b>
2.2.1	Análise modal	7
<b>2.3</b>	<b>Equação da onda</b>	<b>10</b>
<b>2.4</b>	<b>Viga com ressonadores distribuídos</b>	<b>11</b>
2.4.1	Abordagem Modal	11
2.4.2	Abordagem de propagação de ondas	11
<b>2.5</b>	<b>Fundamentos de processamento de sinais</b>	<b>12</b>
2.5.1	Janelamento	12
2.5.2	Estimação da FRF via DEP	13
2.5.3	Amostragem de um sinal	14
<b>3</b>	<b>MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DO NÚMERO DE ONDA</b>	<b>16</b>
<b>3.1</b>	<b>Identificação do número de onda via método de três pontos</b>	<b>16</b>
<b>3.2</b>	<b>Identificação do número de onda via frequência espacial</b>	<b>18</b>
3.2.1	Série de Fourier Discreta Regressiva - RDFS	19
<b>3.3</b>	<b>Identificação do número de onda via técnica de correlação</b>	<b>21</b>
<b>3.4</b>	<b>Conclusões parciais</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>22</b>
<b>4.1</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>22</b>
4.1.1	Modelo de Elementos Finitos	22
4.1.1.1	Método dos três pontos	23
4.1.1.2	Método da frequência espacial	25

4.1.2	Modelo analítico de uma viga simples . . . . .	26
4.1.2.1	Método dos três pontos . . . . .	28
4.1.3	Modelo analítico de uma viga com ressonadores . . . . .	30
<b>4.2</b>	<b>Resultados experimentais . . . . .</b>	<b>32</b>
4.2.1	Viga de aço . . . . .	33
4.2.1.1	Condição de contorno engastada . . . . .	34
4.2.1.2	Condição de contorno livre-livre . . . . .	36
4.2.2	Viga de poliamida com perfil I . . . . .	40
4.2.2.1	Experimento inicial . . . . .	40
4.2.2.2	Experimento final . . . . .	42
4.2.3	Viga de poliamida com ressonadores . . . . .	45
4.2.3.1	Experimento inicial . . . . .	45
4.2.3.2	Experimento final . . . . .	49
	<b>5 DISCUSSÃO DE RESULTADOS . . . . .</b>	<b>53</b>
5.1	Máximo e Mínimo número de onda mensurável . . . . .	53
5.2	Influência dos Parâmetros . . . . .	54
5.3	Condições experimentais . . . . .	57
	<b>6 CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>61</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>63</b>
	<b>APÊNDICE A – ANÁLISE MODAL DE UMA VIGA COM RESSONADORES PERIODICAMENTE DISTRIBUÍDOS . . . . .</b>	<b>64</b>
	<b>APÊNDICE B – RESPOSTA FORÇADA UTILIZANDO PROPAGAÇÃO DE ONDAS . . . . .</b>	<b>67</b>
B.1	Equação da onda . . . . .	67
B.1.1	Viga em balanço . . . . .	68

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação

Os metamateriais estruturais surgiram recentemente na engenharia como uma forma alternativa de controle de ruídos e vibrações com ótimos resultados. Diversos são seus potenciais de aplicação, como por exemplo, em asas de avião, cabos de transmissão, atenuação de ondas acústicas, entre outros.

Metamateriais são estruturas periódicas sujeitas ao fenômeno de '*elastic band gap*', bandas de frequência onde não há propagação de onda ou transferência de energia na estrutura. No entanto, sua fabricação se torna difícil pela necessidade de uma geometria complexa, com ressonadores para que ocorra o fenômeno de *band-gap* pelo efeito de ressonância local. Os ressonadores podem ser sistemas massa-mola, inclusões na geometria, massas em balanço entre outros, distribuídos de forma periódica ao longo da estrutura. (FABRO, 2016). O desenvolvimento e a pesquisa de novas técnicas de fabricação por manufatura aditiva viabilizou a fabricação de protótipos para testes e estudos. A Fig. 1.1 mostra a comparação da resposta em frequência de duas vigas I idênticas, uma sem e outra com ressonadores. As duas curvas representam a aceleração de transferência para as estruturas, determinadas experimentalmente a partir das vigas utilizadas na realização deste trabalho. O band-gap na viga com ressonadores pode ser observado em torno da frequência de 1600  $Hz$ . Os demais picos de ressonância diferem um pouco um do outro devido à adição de massa dos ressonadores.

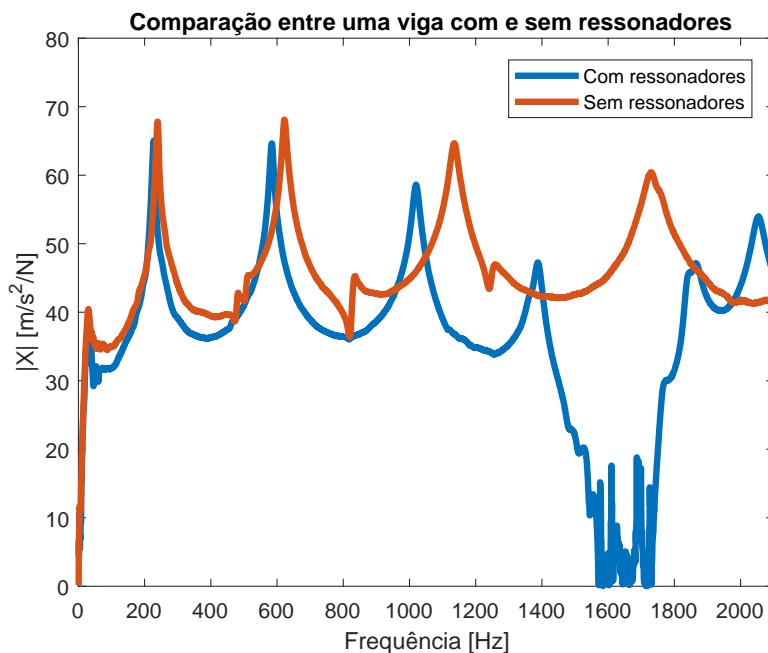


Figura 1.1 – Comparação da aceleração de transferência entre duas vigas, uma sem e outra com ressonadores.

Uma das dificuldades da utilização de metamateriais é a obtenção experimental das curvas de dispersão para viabilizar a sua análise em termos de propagação de ondas (KALKOWSKI, 2017). As curvas de dispersão podem ser também utilizadas para o projeto de estruturas de metamaterial. Existem alguns métodos experimentais para determinação das curvas de dispersão presentes na literatura, porém todos com alguma limitação. Um dos métodos mais utilizados é a técnica de correlação de onda, ou ICW (*Inhomogeneous Correlation Wave*) (THITE; FERGUSON, 2004). Uma limitação desse método é o seu peso computacional. Um outro método disponível é o da Função Resposta em Frequência (FRF), ou método dos três pontos, deduzido a partir da equação de onda propagante em um guia de onda unidimensional (HINKE, 2004), em que são utilizados três pontos de medição distintos e igualmente espaçados na estrutura, e é possível, a partir de uma expressão analítica, estimar o número de onda. Essa relação será explorada nesse trabalho.

Os resultados do método dos três pontos e da correlação são comparados com outros métodos, como a aplicação da transformada Discreta de Fourier na ODS (*Operation Deflection Shape*) da estrutura, que é a forma espacial de vibração da estrutura para uma determinada frequência. Será feita uma discussão sobre as limitações de cada método e sobre a prática experimental.



## 1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo específico apresentar um estudo experimental de identificação de número de onda em estruturas unidimensionais com aplicações em metamateriais estruturais.

Para tanto, têm-se os seguintes objetivos gerais:

- Comparar os diferentes métodos de identificação de número de onda propostos experimentalmente para uma estrutura de metamaterial
- Compreender e discutir a influência dos diversos parâmetros e setup experimental
- Discutir a eficiência e as limitações dos métodos experimentais

## 1.3 Metodologia

A investigação será feita em três etapas. Na primeira, é feita uma simulação numérica de uma viga simples para obter as funções resposta em frequência (FRF) em três pontos da viga e é aplicado o método dos três pontos e o método da frequência espacial na ODS para cada frequência. Na segunda, a partir da solução modal analítica de vigas, são simulados experimentos, com a adição de ruído, para analisar a influência de diferentes parâmetros, como a posição dos pontos de aquisição, e aplicar ferramentas de processamento de sinal para limpar o sinal.

Em seguida, nessa mesma etapa, é realizado um experimento com uma viga de aço com propriedades bem conhecidas, utilizando um acelerômetro e um martelo de impacto como transdutores e o software de aquisição e processamento de dados '*Vibsoft*' da *Polytech*. Nessa parte, aspectos de processamento de sinais são abordados, como a influência do número de amostras e da taxa de aquisição de dados nos resultados obtidos e ferramentas como janelamento também são implementados e discutidos. Será feita uma comparação entre os resultados numérico, experimental e analítico.

Na segunda etapa, são realizados experimentos para obtenção das FRFs das vigas sinterizadas de poliamida, porém devido a limitação de sensibilidade dos transdutores foi utilizado um *shaker* eletrodinâmico para excitar a estrutura. Os métodos de identificação do número de onda são implementados e os resultados comparados com resultados numéricos determinados em outros trabalhos (OLIVEIRA, 2017).

Na terceira e última etapa, o experimento da segunda etapa é realizado novamente dessa vez com equipamentos mais sensíveis, viabilizando a sua utilização nas estruturas de poliamida e garantindo melhores resultados. Foram utilizados um martelo de impacto e um acelerômetro. Novamente, os resultados são comparados com resultados obtidos numericamente a partir do software *Ansys APDL*.

## 2 REVISÃO TEÓRICA

Neste capítulo, serão apresentados aspectos fundamentais de propagação de ondas, como número de onda e a curva de dispersão. Será apresentada também a análise de uma resposta forçada utilizando propagação de ondas e duas possíveis soluções analíticas para determinação da curva de dispersão em uma estrutura de metamaterial. Em seguida, será apresentada a solução analítica para uma viga de Euler-Bernoulli, que será utilizada para simular o experimento no software *MatLab*, de forma a facilitar a aplicação dos métodos e a variação dos parâmetros experimentais. Por fim, serão apresentados conceitos de processamento de sinais, utilizados no âmbito experimental para melhorar a qualidade dos resultados.

### 2.1 Propagação de Ondas

Uma onda mecânica pode ser definida como um fenômeno onde há transporte de uma quantidade física em um meio, sem transporte efetivo do meio. Pode ser caracterizada pelos deslocamentos ao longo da estrutura relativos à posição de equilíbrio da estrutura e pela velocidade e direção com a qual esse campo de deslocamentos se propaga. O deslocamento ao longo do tempo pode ser representado por uma exponencial complexa  $w(t) = We^{i\omega t}$  onde  $\omega$  é a frequência angular com a qual o deslocamento oscila e  $W$  é sua amplitude. Observando-se a distorção após um tempo  $t$ , tem-se uma mudança de fase de  $\phi = \omega t$ . Uma onda que se propaga no espaço na direção  $x$  de uma estrutura possui uma velocidade que não depende de sua magnitude, e o distúrbio em um ponto  $x_1$  irá se propagar pela estrutura, a distorção terá a forma de uma senóide no espaço. Esse padrão de distorção tem uma velocidade de fase  $c$ , isto é, um observador que acompanha a perturbação com uma velocidade  $c$  não irá observar mudança de fase nos pontos do meio. Agora, considere um ponto distante de  $x_1$  do ponto de perturbação que será deslocada após um tempo  $t_1 = \frac{x_1}{c}$ , logo, a variação do deslocamento no ponto  $x_1$  será dada por  $w_1(t) = W_1 e^{i(\omega t - \omega \frac{x_1}{c})}$ . É interessante notar que o termo  $\frac{\omega}{c}$  pode ser entendido como uma variação de fase por unidade de distância, ou como uma frequência espacial, chamada de número de onda  $k$ , dado por (FAHY; GARDONIO, 2007)

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.1)$$

Assim como a frequência angular pode ser definida como  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , a frequência espacial pode ser vista como uma variação de fase de  $2\pi$  à cada comprimento de onda  $\lambda$ .

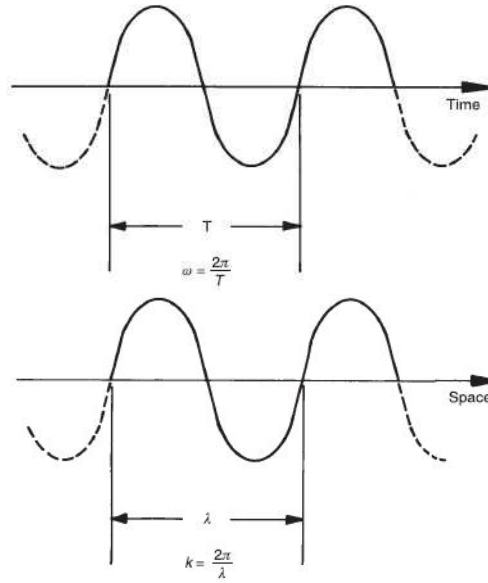
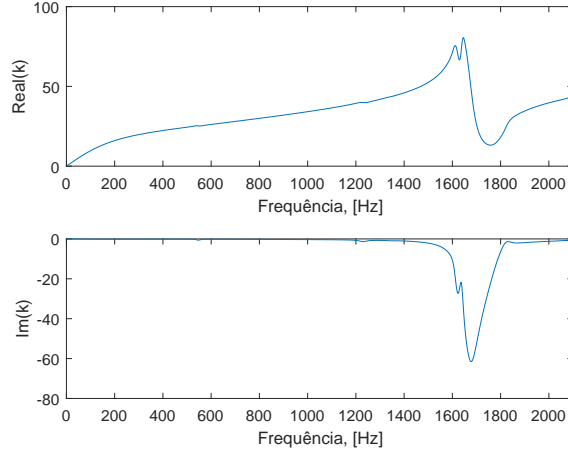


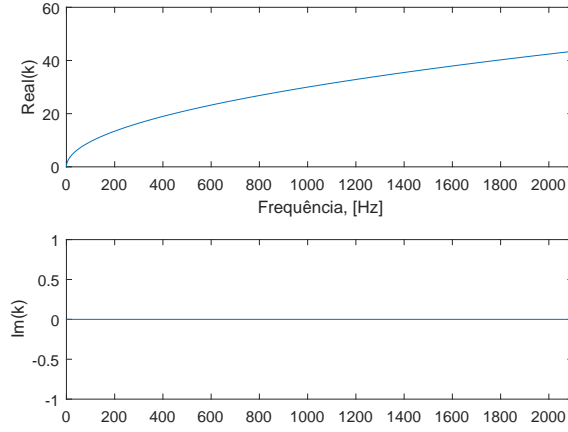
Figura 2.1 – Analogia entre as frequências angular e espacial (FAHY; GARDONIO, 2007).

Através do número de onda podem ser analisadas diversas características da propagação da onda e da transferência de energia. A velocidade de fase pode ser encontrada a partir da relação exposta na Eq. (2.1) como sendo  $c_{ph} = \frac{\omega}{k}$ , e partindo desse conceito podemos definir também a velocidade de grupo, dada por  $c_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$  associada a transmissão de energia pela onda propagante. Com as curvas de dispersão esses dados podem ser facilmente obtidos.

A curva de dispersão do número de onda para uma estrutura de metamaterial possui algumas características singulares. Podemos observar na Fig. 2.2a que para a banda de frequência onde ocorre o *band-gap*, em torno de  $1600 \text{ Hz}$ , existe um ponto de máximo, de mínimo e um trecho da curva com inclinação negativa. Nos pontos de máximo e de mínimo a inclinação é zero, indicando que a velocidade de grupo é nula e portanto não há transporte de energia ao longo da estrutura. O trecho de inclinação negativa indica que a energia está sendo transportada na direção oposta à direção de propagação da onda, ou seja, da velocidade de fase. É também possível separar o número de onda em uma parte real e imaginária, sendo a parte real associada às ondas propagantes e a parte imaginária às ondas evanescentes. Na banda de frequências atenuadas, há a presença de um número de onda com parte real e parte imaginária significativa, de modo que as ondas propagantes decaem rapidamente no espaço. Esse decaimento tem como resultado a atenuação de vibração naquela banda de frequências.



(a) Curva de dispersão para uma estrutura de metamaterial.



(b) Curva de dispersão para uma viga simples.

Figura 2.2 – Comparação entre as curvas de dispersão para uma viga de metamaterial e para uma viga simples.

## 2.2 Equação da viga

A dedução da equação do movimento em uma viga é feita a partir da análise dinâmica de um elemento infinitesimal de uma viga em flexão. Lembrando que será utilizada a teoria de viga esbelta ou *Euler-Bernoulli*. Escrevendo a equação de equilíbrio, a partir do elemento representado na Fig. 2.3, tem-se que o termo de inércia associado ao movimento da viga é dado por

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

O somatório das forças e dos momentos são dados, respectivamente, por

$$-(V + dV) + f(x, t) dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.3)$$

e

$$(M + dM) - (V + dV) dx + f(x, t) dx \frac{dx}{2} - M = 0. \quad (2.4)$$

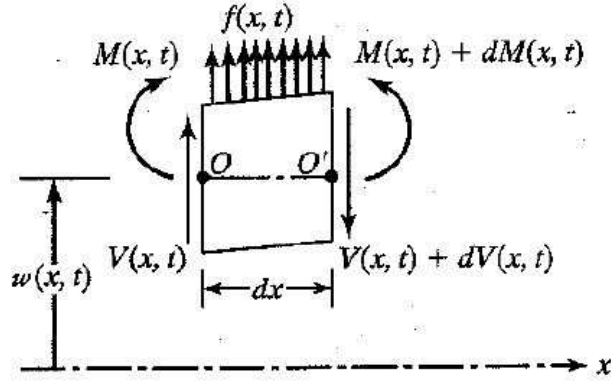


Figura 2.3 – Elemento infinitesimal de uma viga em flexão (RAO, 2010)

e os diferenciais de esforço cisalhante e de momento são dados por

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx, \text{ e } dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx,$$

reescrevendo as equações (2.3) e (2.4) e utilizando as relações acima e desprezando os termos de ordem superior em  $dx$ , chega-se nas seguintes relações

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

e

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - V(x, t) = 0. \quad (2.6)$$

Da Eq. (2.6), temos que  $V = \frac{\partial M}{\partial x}$ . Relembrando da mecânica dos sólidos que  $M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$ , podemos substituir essas relações na Eq. (2.5) para obter a seguinte equação do movimento

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t). \quad (2.7)$$

Se a área de seção transversal for constante e a viga estiver sujeita a vibração livre, i.e.  $f(x, t) = 0$ , então

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.8)$$

que é uma equação diferencial parcial, cuja solução analítica pode ser encontrada através do método de separação de variáveis (MEIROVITCH, 2001).

### 2.2.1 Análise modal

A função  $w(x, t)$ , que representa o deslocamento de um ponto localizado em  $x$  no instante  $t$ , tem dependência tanto no tempo quanto no espaço. Podemos escrevê-la como

o produto entre duas funções, uma com dependência somente no tempo e outra somente no espaço, i.e.,

$$w(x, t) = Y(x)\eta(t).$$

Substituindo na Eq. (2.8), temos

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} \frac{1}{Y(x)} = - \frac{d^2 \eta(t)}{dt^2} \frac{1}{\eta(t)}. \quad (2.9)$$

Como o lado esquerdo da equação possui dependência somente com o espaço e o lado direito somente com o tempo, os dois podem ser iguais por uma constante  $\omega$ , para facilitar a demonstração, será adotada uma constante  $\omega^2$ . Obtêm-se, assim, duas equações diferenciais ordinárias, com soluções separadas

$$c^2 \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} \frac{1}{Y(x)} = \omega^2, \quad (2.10)$$

e

$$- \frac{d^2 \eta(t)}{dt^2} \frac{1}{\eta(t)} = \omega^2, \quad (2.11)$$

resultando em

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0, \quad (2.12)$$

e

$$\frac{d^2 \eta(t)}{dt^2} + \omega^2 \eta(t) = 0, \quad (2.13)$$

onde  $\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} \sqrt{\omega}$ . Estimando-se uma solução para a Eq. (2.12) na forma  $Y(x) = e^{sx}$ , obtêm-se quatro raízes na forma

$$s = \pm\beta, \pm i\beta.$$

Utilizando-se a relação de Euler e as funções hiperbólicas, chega-se a uma solução geral para  $Y(x)$  na forma

$$Y(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \sinh \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \cosh \beta x, \quad (2.14)$$

onde as constantes serão determinadas pelas condições de contorno. Para a Eq. (2.13) a solução tem a forma  $\eta(t) = e^{st}$ , que resulta em duas raízes  $s = \pm i\omega$ . Logo, a solução geral para a função  $\eta(t)$  é dada por

$$\eta(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}, \quad (2.15)$$

onde as constantes serão determinadas pelas condições iniciais. Note que substituído-se as soluções  $\eta(t) = e^{i\omega t}$  e  $Y(x) = e^{ikx}$  na equação (2.8) chega-se na relação

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} \sqrt{\omega}, \quad (2.16)$$

que é a relação de dispersão para uma viga esbelta.

Para a análise proposta no presente trabalho, foi utilizada a solução para a equação da onda em uma viga com uma extremidade engastada e a outra extremidade livre, com amortecimento viscoso e sujeita a um impulso unitário. Dessa forma, pode-se obter a resposta em qualquer ponto da viga e obter seu espectro para todas as frequências, e posteriormente facilitar a comparação com o experimento.

As condições de contorno para uma viga em balanço são dadas, em  $x = 0$ , por

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (2.17)$$

e, em  $x = L$ , por

$$\frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial x^3} = 0. \quad (2.18)$$

Aplicando-as na Eq. (2.14), surge um problema de autofunções. Para se obter soluções diferentes da solução trivial é preciso resolver a equação transcendental

$$\cos \beta_n L \cosh \beta_n L = -1.$$

Resolvendo numericamente, chega-se nos seguintes autovalores

$$\begin{aligned} \beta_1 L &= 1.8751 \\ \beta_2 L &= 4.6940 \\ \beta_3 L &= 7.8547 \\ \beta_4 L &= 10.9955 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.19)$$

E portanto, a solução de  $Y(x)$  fica

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x), \quad (2.20)$$

onde  $Y_n(x)$  é dado por

$$Y_n(x) = A_n [\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x + \left( \frac{\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L}{\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L} \right) (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]. \quad (2.21)$$

Uma importante propriedade das autofunções é a sua ortogonalidade, ou seja

$$\int_0^\infty Y_n(x)Y_m(x)dx = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}.$$

Representando a excitação por um impulso unitário dado por  $\delta(t)$  aplicado à uma distância  $a$  da origem da viga e assumindo amortecimento viscoso, a Eq. (2.8) se torna

$$[\eta(t) + 2\xi\omega\dot{\eta}(t) + \omega^2\eta(t)]Y_n(x) = \delta(t)\delta(x - a). \quad (2.22)$$

Em seguida, multiplica-se os dois lados da equação por  $Y_n(x)$  e através da propriedade de ortogonalidade e da propriedade de filtragem da função  $\delta(x - a)$  chegamos na equação diferencial

$$\eta(t) + 2\xi\omega\dot{\eta}(t) + \omega^2\eta(t) = Y_n(a)\delta(t). \quad (2.23)$$

Resolvendo-se a equação e aplicando as condições iniciais obtemos a solução

$$\eta_n(t) = Y_n(a)\frac{1}{2\omega_d}(e^{t(-\xi\omega_n - i\omega_d)} - e^{t(-\xi\omega_n + i\omega_d)}), \quad (2.24)$$

onde  $\omega_d = \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$  e a função  $\eta(t)$  é a coordenada modal. Com as equações (2.24) e (2.21) pode-se escrever a solução geral para o deslocamento como a soma de todas as autofunções e todas as coordenadas modais,

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x)\eta_n(t). \quad (2.25)$$

Esse modelo será utilizado para simular o experimento no software *MatLab*, possibilitando variar facilmente os pontos de medição e avaliar a sua influência nos resultados, bem como avaliar qual a melhor discretização do sinal a ser utilizada e a influência das ferramentas de processamento de sinais

## 2.3 Equação da onda

Os tipos de esforços aplicados à uma estrutura definem os tipos de ondas que irão se propagar na estrutura. Para o caso de uma viga, com esforços de flexão, são gerados dois tipos de onda, uma propagante e uma evanescente, que se deslocam nos sentidos positivo e negativo. Os deslocamentos em qualquer ponto da estrutura podem ser definidos pela soma das amplitudes e da fase das ondas naquele ponto, através da relação

$$w(x) = a^+ e^{-ikx} + a_N^+ e^{-kx} + a^- e^{ikx} + a_N^- e^{kx}, \quad (2.26)$$



onde as constantes  $a^+$  e  $a^-$  são as amplitudes das ondas propagantes que se deslocam para os sentidos positivo e negativo respectivamente, e  $a_N^+$  e  $a_N^-$  das ondas evanescentes.

O número de onda  $k$  define em quantos radianos a fase da onda muda ao se propagar por  $x$  m. Dessa forma, com a determinação da curva de dispersão é possível também calcular os deslocamentos em qualquer ponto da estrutura, dada uma excitação, sem a necessidade de medir experimentalmente todos os pontos. Maiores detalhes sobre a análise de respostas forçada em vigas podem ser encontrados no Apêndice B.

## 2.4 Viga com ressonadores distribuídos

### 2.4.1 Abordagem Modal

Um modelo analítico de uma viga com ressonadores também será utilizado para fins de comparação com os resultados experimentais. O modelo analítico foi derivado no trabalho de (SUGINO, 2017) e é apresentado no Apêndice A. Ele descreve a função resposta em frequência de qualquer ponto de uma viga com ressonadores idênticos distribuídos ao longo da estrutura dada pela expressão

$$\frac{W(x_r, \omega)}{F(x_e, \omega)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(x_r)\phi_j(x_e)}{\omega_j^2(1 + i\eta) - \omega^2(1 + \epsilon \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2})}, \quad (2.27)$$

onde  $\phi_j(x_r)$  é a função modal para a viga no ponto onde a resposta é medida,  $\phi_j(x_e)$  é a função modal no ponto onde foi feita a excitação,  $\omega_j$  é a  $j$ -ésima frequência natural da viga,  $\omega_p$  é a frequência natural do ressonador e  $\epsilon$  é a razão entre a massa total dos ressonadores e a massa total da viga dado por

$$\epsilon = \frac{n \cdot m_p}{\rho AL}, \quad (2.28)$$

Onde  $m_p$  é a massa do ressonador e  $n$  é o número total de ressonadores.

Maiores detalhes do desenvolvimento da equação do movimento considerando ressonadores periodicamente distribuídos ao longo de uma estrutura podem ser encontrados no Apêndice A.

### 2.4.2 Abordagem de propagação de ondas

É possível determinar a curva de dispersão analiticamente através da análise de propagação de ondas. Partindo da equação do movimento, onde são consideradas massa

e rigidez distribuídas ao longo da estrutura, com rigidez  $k_p(x)$  e massa  $m_p(x)$

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \sum_{p=1}^S k_p u_p(t) \delta(x - x_p) = p(x, t), \quad (2.29)$$

e  $u_p(t)$  é a resposta do p-ésimo ressonador, dado por

$$m_p \ddot{u}_p(t) + k_p(t) u_p(t) + m_p \ddot{w}(x_p, t) = 0 \quad (2.30)$$

Assumindo resposta harmônica no tempo e espaço, de forma que  $w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}e^{ikx}$  e  $u_p(x, t) = U_p e^{i\omega t}$ , e determinando a amplitude  $U_p$  em função da frequência de excitação como  $U_p = \frac{\omega^2}{\omega_p^2 - \omega^2} W(x_p)$ , chegamos á seguinte expressão

$$EI W(x) k^4 - \left( \rho A \omega^2 W(x) + \epsilon \rho A \omega^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \right) W(x) = P(x), \quad (2.31)$$

Resultando na equação de dispersão

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} \left( 1 + \epsilon \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \right)} \sqrt{\omega} \quad (2.32)$$

O resultado obtido é equivalente à de uma viga com um neutralizador contínuo proposto por (GAO, 2011). Aplicando essa expressão do número de onda na Eq. B.1, também é possível determinar a resposta em frequência em qualquer ponto da estrutura, como mostrado no Apêndice B.

## 2.5 Fundamentos de processamento de sinais

Algumas ferramentas de processamento de sinais utilizadas na realização deste trabalho são discutidas nessa seção. A presença de ruído nas medições experimentais e o truncamento causam distorção nos sinais adquiridos. Ferramentas como o janelamento e a estimação da FRF via densidade espectral de potência (DEP) ajudam a amenizar essa distorção e obter resultados menos ruidosos.

### 2.5.1 Janelamento

O janelamento é utilizado para evitar os efeitos de *leakage* (SHIN; HAMMOND, 2008), frequências parasitas que surgem ao redor de uma frequência central devido aos efeitos de truncamento do sinal. O janelamento adequado também pode reduzir os efeitos do ruído, no caso de ensaios utilizando martelo de impacto, por exemplo. Para cada sinal há uma janela ótima, para o presente trabalho foram utilizadas as janelas exponencial e

*hanning*. A primeira é ideal para casos onde o sinal é transiente e há a presença de amortecimento como no caso de respostas ao impulso unitário. A segunda é ideal para sinais em regime permanente, como por exemplo quando é utilizado um excitador harmônico.

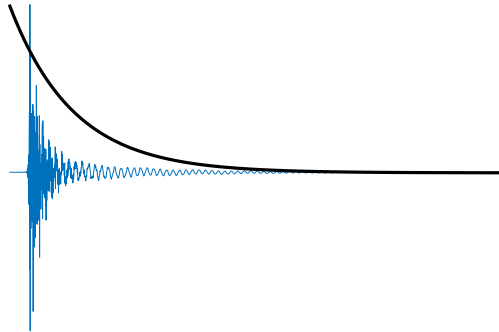


Figura 2.4 – Janela exponencial.

Outra janela utilizada foi a janela força, para o impulso unitário. A janela elimina todo o sinal de força antes e após o impulso, como representado na Fig. 2.5, que tem baixa relação sinal-ruído (SNR), devido à contaminação do ruído da instrumentação.

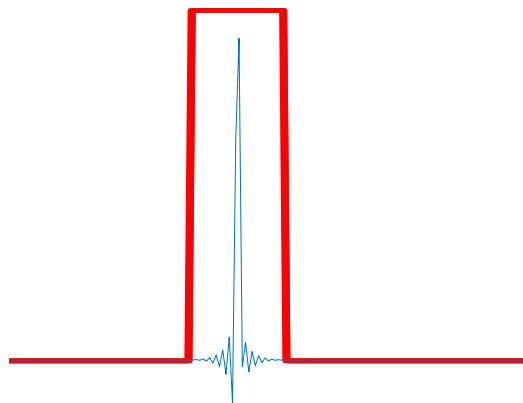


Figura 2.5 – Janela força.

### 2.5.2 Estimação da FRF via DEP

O ruído e as condições do experimento podem causar pequenas diferenças na resposta do sistema, caracterizando-o assim como estocástico. É interessante utilizar ferramentas para sinais aleatórios que levem em consideração estimadores das respostas. A estimação da FRF via densidade espectral de potência (DEP) é uma ótima ferramenta

para essa finalidade. O método consiste na determinação da função de autocorrelação dos sinais de entrada e saída, dada por

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(\tau - t)d\tau, \quad (2.33)$$

onde  $x(t)$  é um processo estocástico. Aplicando-se a transformada de Fourier na função de autocorrelação, obtemos a densidade espectral de potência  $S_{xx}$ . De forma análoga, a função de correlação cruzada, relaciona a entrada e a saída do sistema, e sua transformada resulta na densidade espectral de potência cruzada  $S_{xy}$ .

A FRF pode ser determinada a partir das densidades espectrais de potência pelas relações (SHIN; HAMMOND, 2008)

$$H_1(f) = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad (2.34)$$

$$H_2(f) = \frac{S_{yy}}{S_{yx}}, \quad (2.35)$$

e

$$H_T(f) = \frac{S_{yy} - S_{xx} + \sqrt{(S_{xx} - S_{yy})^2 + 4S_{xy}^2}}{2S_{yx}}. \quad (2.36)$$

É importante lembrar que o estimador  $H_1$  considera ruído na entrada e superestima a FRF nas regiões de ressonância caso haja ruído na saída. De maneira análoga, o estimador  $H_2$  considera ruído na saída e subestima a FRF nas regiões de anti-ressonância na presença de ruído na entrada, enquanto que o estimador  $H_T$  considera ruído tanto na entrada quanto na saída.

Por fim, definimos a função de coerência ordinária, utilizada para avaliar o grau de linearidade entre a entrada e a saída do sistema, e que também pode ser utilizado como uma medida de confiança da FRF estimada com a FRF verdadeira, dada por

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}. \quad (2.37)$$

Note que os valores da função de coerência variam de 0 a 1 , onde 0 significa que não há correlação entre a entrada e a saída do sistema, e 1 há correlação total. O intervalo entre esses valores indica um certo grau de linearidade mas presença de não-linearidades também.

### 2.5.3 Amostragem de um sinal

É importante ressaltar as relações e influências do número de pontos aquisitados e a taxa de amostragem dos pontos. Todos os sinais aquisitados são convertidos de analógico

para digital, e por tanto, se tornam sinais discretos e finitos, com  $N$  pontos medidos a cada  $dt$  segundos como ilustrado na Fig. 2.6.

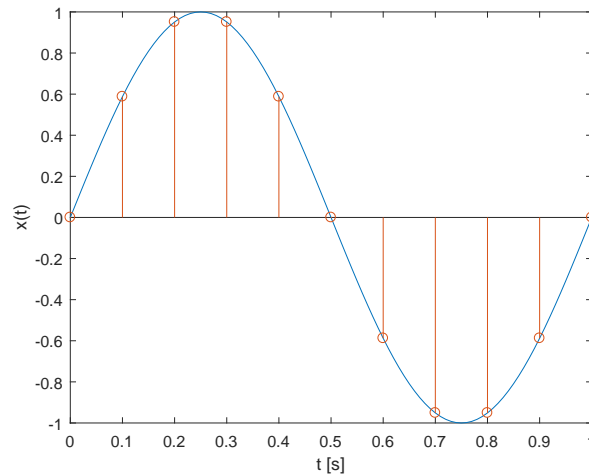


Figura 2.6 – Sinal analógico contínuo sendo convertido para um sinal digital discreto.

Na situação da Fig. 2.6 a, foram medidos 10 pontos a cada 0.1 segundos, resultando em um tempo de aquisição de 1 segundo. Dessa forma, pode-se definir qual será a máxima frequência possível de se detectar no sinal e qual o espaçamento entre elas. Pelo teorema de *Nyquist*, a máxima frequência  $f_s$  detectável em um sinal discreto é limitada pela taxa de amostragem, que deve ser  $2f_s$ . Isso ocorre porque a parte do sinal contendo componentes com meios períodos menores do que o espaço de tempo entre dois pontos amostrados consecutivos não é "vista" pelo transdutor, como ilustrado à seguir.

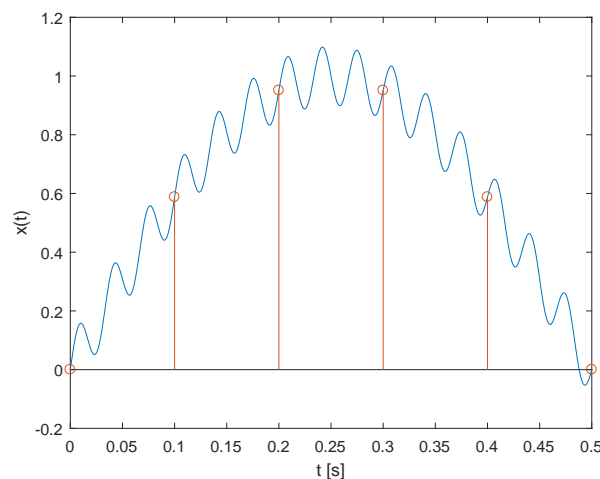


Figura 2.7 – A alta frequência do sinal analógico não é detectada pelo sinal discretizado.

Portanto, a seguinte relação pode ser feita. Se um sinal é medido à cada  $\Delta t$  segundos e possui  $N$  pontos, então o tempo total de aquisição será dado por  $t_s = \Delta t N$ , logo a máxima frequência que será detectada para esse sinal será  $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ . A partir dessas relações podemos definir também qual será o intervalo entre duas frequências, pois se  $t_s = \Delta t N$  então  $f_s = \Delta f N$  e  $\Delta f = \frac{f_s}{N}$ , então  $\Delta f = \frac{1}{\Delta t N}$  que é igual à  $\Delta f = \frac{1}{t_s}$ .

# 3 MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DO NÚMERO DE ONDA

Neste capítulo, serão apresentadas os fundamentos teóricos e práticos das três técnicas de identificação de número de ondas utilizadas nesse trabalho. A primeira utiliza a função resposta em frequência (FRF) medida em três pontos distintos e igualmente espaçados, a segunda basea-se no conceito de frequência espacial e utiliza a transformada de Fourier da medição de uma conjunto de pontos ao longo da estrutura e, por último, a terceira técnica utiliza uma medida da correlação dos dados experimentais com um campo de deslocamentos com frequência espacial definida.

## 3.1 Identificação do número de onda via método de três pontos

Essa técnica de identificação das curvas de dispersão implementada neste trabalho foi discutida em (HINKE, 2004). Partindo da equação da onda geral, desconsiderando as ondas evanescentes, tem-se que

$$u(x, t) = (a^+ e^{-ikx} + a^- e^{ikx}) e^{i\omega t}, \quad (3.1)$$

Consideram-se três pontos igualmente espaçados  $x_1 = -d$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_3 = d$  (Fig. 3.1). Tem-se os deslocamento no tempo em cada um desses pontos dados por

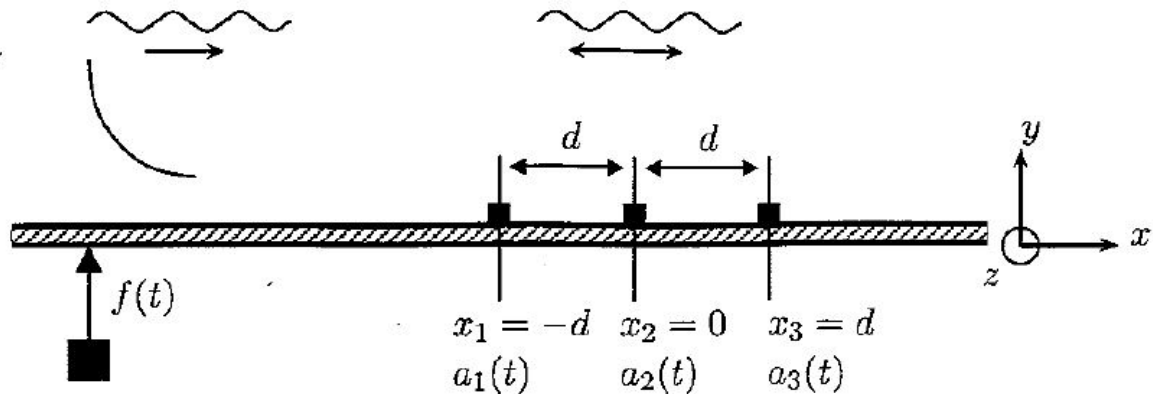


Figura 3.1 – Montagem do experimento (HINKE, 2004)

$$u_1(t) = (a^+ e^{ikd} + a^- e^{-ikd}) e^{i\omega t}, \quad (3.2)$$

$$u_2(t) = (a^+ + a^-) e^{i\omega t}, \quad (3.3)$$

$$u_3(t) = (a^+ e^{-ikd} + a^- e^{ikd}) e^{i\omega t}. \quad (3.4)$$

A viga é então sujeita à um forçamento qualquer. Após a obtenção das FRFs nos três pontos, dadas por  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , chega-se à seguinte relação

$$\frac{A_1 + A_3}{A_2} = \frac{a^+ e^{ikd} + a^- e^{-ikd} + a^+ e^{-ikd} + a^- e^{ikd}}{a^+ + a^-}. \quad (3.5)$$

Reorganizando a equação chega-se em

$$\frac{A_1 + A_3}{A_2} = \frac{(a^+ + a^-)(e^{ikd} + e^{-ikd})}{a^+ + a^-}. \quad (3.6)$$

Simplificando e utilizando a relação de Euler, tem-se

$$\frac{A_1 + A_3}{A_2} = e^{ikd} + e^{-ikd} = 2 \cos kd. \quad (3.7)$$

Utilizando  $r = \frac{A_1 + A_3}{2A_2}$ , por fim, chega-se na equação do número de onda a partir das respostas em frequência e da distância entre os pontos de medição

$$k = \frac{\cos^{-1} r}{d}. \quad (3.8)$$

Note que para melhorar a curva um ajuste polinomial da Eq. 3.7 pode ser feito para amenizar os efeitos das ressonâncias e antirressonâncias que geram singularidades na curva.

As Figs. 3.2 e 3.3 à seguir exemplificam a aplicação do método. A três linha verticais indicam três pontos distintos onde a resposta ao forçamento é medida. Em seguida, são aplicadas as transformadas de Fourier tanto na entrada (forçamento) quanto na saída (aceleração) e a resposta em frequência do sistema é determinada a partir da relação  $X(\omega) = F(\omega)A(\omega)$  onde  $X(\omega)$  é a transformada de Fourier do sinal de aceleração,  $F(\omega)$  é a transformada do sinal de forçamento e  $A(\omega)$  é a função resposta em frequência do sistema.

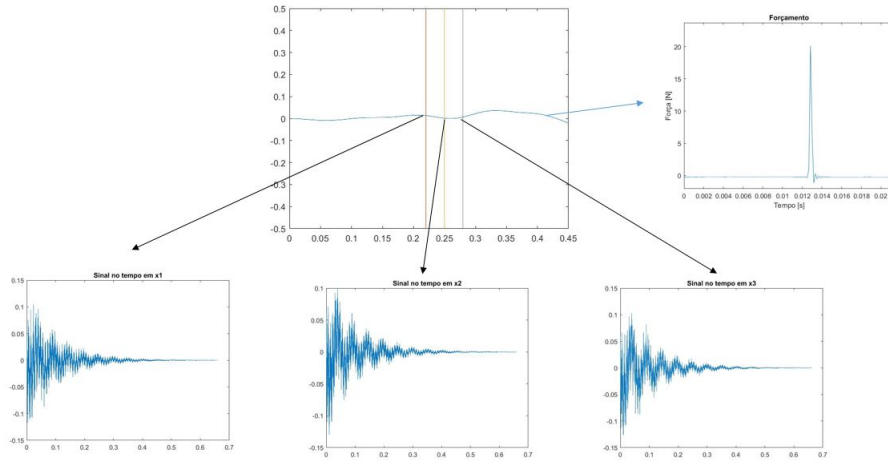


Figura 3.2 – Exemplo de aplicação do método da FRF, aquisição dos sinais no tempo.

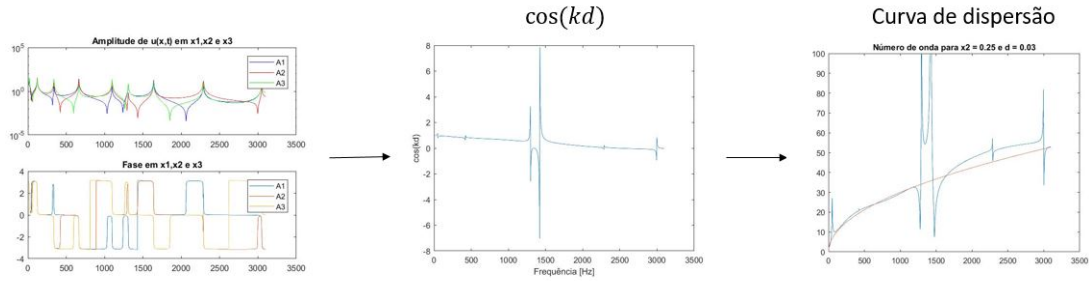


Figura 3.3 – Determinação das FRFs e utilização da relação 3.7 para determinar o número de onda.

## 3.2 Identificação do número de onda via frequência espacial

Ao aplicar a transformada de Fourier em um sinal no tempo, obtêm-se o espectro de frequências, ou seja, quais frequências estão presentes no sinal e qual a sua amplitude. De maneira análoga, se aplicarmos a transformada de Fourier na ODS (campo de deslocamentos) de uma estrutura para uma certa frequência, obtemos quais frequência espaciais estão presentes no sinal, e assim seu número de onda. Dessa forma, se obtermos a amplitude e a fase para diversos pontos em uma viga, sabemos qual a forma da onda que está se propagando na estrutura (ODS) para cada frequência, e então podemos aplicar a transformada de Fourier e obter o número de onda frequência por frequência.

Como foi discutido na seção 2.3.3, a discretização da frequência de um sinal está associada ao tempo que esse sinal foi adquirido. No domínio do espaço o tempo de aquisição é análogo ao comprimento total da viga. Portanto o intervalo entre dois valores de número de onda no domínio do número de onda está limitado pelo comprimento da viga, finito. Se a FFT for aplicada a ODS de uma viga, teremos um espaçamento muito grande entre um número de onda e outro, dessa forma limitando a sua detecção. Para contornar esse problema, a técnica de *zero padding* é aplicada (SHIN; HAMMOND, 2008),



adicionando-se zeros ao vetor do espaço e aumentando artificialmente o comprimento da viga, e portanto, diminuindo o intervalo entre dois números de onda consecutivos. No entanto, a implementação dessa técnica faz com que haja uma interpolação no domínio do número de onda, gerando *leakage*.

Para ilustrar o método, a Fig. 3.4 à seguir mostra a ODS de uma viga de metamaterial para cada frequência. O eixo x indica a posição no espaço ao longo da viga, o eixo y indica a frequência para a qual a viga toma aquela forma e o eixo z indica a amplitude absoluta do deslocamento normalizada para cada frequência em cada ponto.

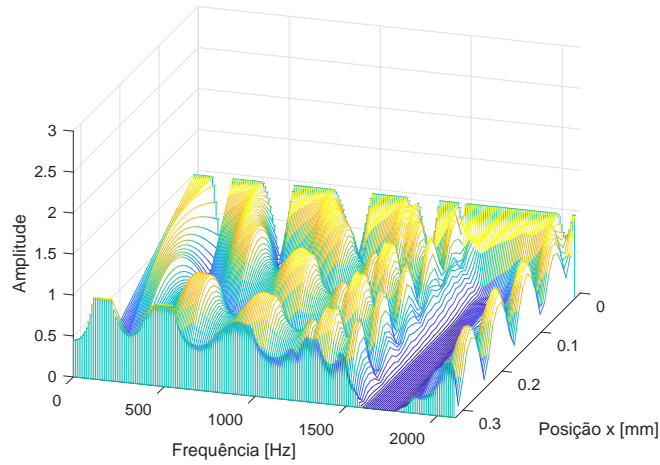


Figura 3.4 – ODS normalizada de uma estrutura de metamaterial para cada frequência.

### 3.2.1 Série de Fourier Discreta Regressiva - RDFS

A RDFS é uma técnica para estimar uma versão generalizada dos coeficientes da série de Fourier Discreta, através de um ajuste por mínimos quadrados. (BATISTA, 2010; ARRUDA, 2009). Pode ser utilizada para um  $dx$  variável e consegue aumentar artificialmente o período do sinal adquirido. À partir da transformada de Fourier Discreta

$$x(t_n) = \sum_{k=-P}^P X_k e^{\frac{-i2\pi k t_n}{M}} + \epsilon_n, \quad (3.9)$$

onde  $n = 1, \dots, N$ ,  $x$  é o vetor de dados do sinal com resolução de  $\Delta t$ ,  $k$  são índices inteiros,  $M$  é o período da série de Fourier discreta,  $N$  é o numero de pontos,  $\epsilon_n$  é o erro causado pelo ruído e  $P$  são as linha de frequência. A Eq. (3.9) toma a forma

$$W_{nk} X_k = x_n + \epsilon_n, \quad (3.10)$$

onde  $W_{nk} = e^{\frac{-i2\pi k t_n}{T}} = W$ ,  $k = -P, \dots, P$ ,  $x_n = x(t_n) = [x(t_1) \dots x(t_N)]^T$  e  $\epsilon_n =$

$[\epsilon_1 \dots \epsilon_N]^T = \epsilon$ . A solução do sistema utilizando a técnica da RDFS é dada por

$$X = (W^H W)^{-1} W^H x, \quad (3.11)$$

onde  $H$  denota o conjugado complexo de  $W$ . O sinal suavizado é dado por

$$x_s = W X. \quad (3.12)$$

Note que o uso da RDFS implica na escolha de dois parâmetros,  $a$  que determina qual o novo período ou comprimento extendido do sinal, e  $P$  que determina quantas linhas espectrais são utilizadas. O parâmetro  $P$  para a presente situação foi determinado como sendo o menor número de linhas necessárias para se chegar no número de onda sem a RDFS, para cada frequência e o parâmetro  $a$  é arbitrário. Foram testados diferentes valores de  $a$  e um erro percentual foi calculado para efeito de comparação.

A RDFS pode ser utilizada como um filtro passa baixa espacial e também pode ser aplicada de forma a amenizar o *leakage* gerado pelo comprimento limitado do sinal. A Fig. 3.5 apresenta um exemplo da determinação do número de onda para uma certa frequência a partir da ODS via FFT, e via RDFS. Note que a barra verde vertical na figura central é o número de onda analítico para a estrutura. A onda representada pela curva verde é a ODS traçada a partir das amplitudes e fases de cada ponto e a curva com círculos, o ajuste feito com a RDFS.

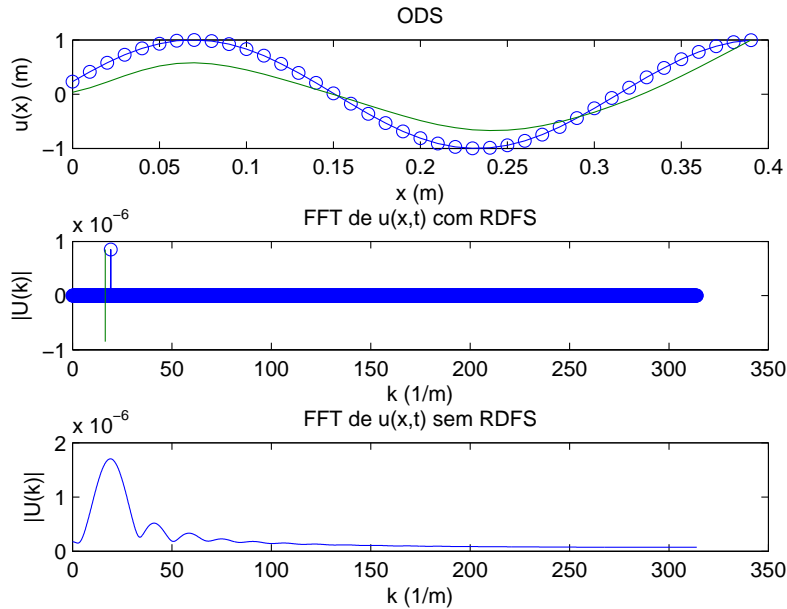


Figura 3.5 – ODS da viga para uma dada frequência (superior), espectro em frequência espacial obtido via RDFS (central) e via FFT (inferior).

### 3.3 Identificação do número de onda via técnica de correlação

Um dos métodos mais utilizados para identificar o número de onda é a técnica de correlação. Uma de suas vantagens é que não há a necessidade de conhecimento prévio sobre as condições de contorno da estrutura, propriedades do material ou propriedades da seção transversal. Por outro lado são necessárias milhões de iterações para a construção total da curva de dispersão. O método adaptado de correlação 1D (SOUZA; FERGUSON, 2018) identifica o número de onda quando o seguinte coeficiente de correlação atinge um máximo,

$$Y(k_{tx}, \omega) = \frac{L}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} A(x_j, \omega) e^{-ik_{tx}x_j} \quad (3.13)$$

onde  $L$  é o comprimento da estrutura,  $N_p$  é o número de pontos medidos,  $A(x_j, \omega)$  é a amplitude da FRF medida no ponto  $x_j$  para a frequência  $\omega$  e  $k_{tx}$  é a estimativa do número de onda a ser identificado.

### 3.4 Conclusões parciais

Neste capítulo foi apresentada uma revisão teórica das três técnicas de identificação experimental de número de onda utilizadas nesse trabalho, a identificação via ajuste de FRF, ou técnica dos três pontos, a identificação via transformada de Fourier da ODS e a identificação via técnica de correlação 1D. Nos capítulos seguintes, essas técnicas serão aplicadas em resultados analíticos, numéricos e experimentais e suas vantagens e limitações serão discutidas.

## 4 RESULTADOS

Neste capítulo, as técnicas de identificação apresentadas anteriormente serão aplicadas para a identificação do número de ondas utilizando resultados obtidos de modelos numéricos, analíticos e experimentais de estruturas do tipo viga. As vantagens e limitações de cada técnica serão exploradas e os resultados numéricos e analíticos obtidos servem como guia para o tratamento do dados obtidos experimentalmente.

### 4.1 Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados os resultados das técnicas de identificação do número de onda aplicado a modelos numéricos, utilizando elementos finitos, e analíticos de vigas simples e um modelo analítico de vigas com ressonadores distribuídos.

#### 4.1.1 Modelo de Elementos Finitos

Para verificar a validade dos métodos discutidos na seção 3, um modelo numérico via elementos finitos foi desenvolvido para a obtenção das FRFs e em seguida implementadas com os métodos discutidos. As simulações foram feitas no software de elementos finitos *Ansys Workbench*. As condições de contorno utilizadas foram com ambas as extremidades livres e outra com uma extremidade engastada e outra extremidade livre, ambas utilizadas posteriormente nas medidas experimentais.

Foram utilizados elementos de viga *Beam 188* para o modelo a fim de diminuir o tempo computacional para convergência dos resultados. Aplicou-se um forçamento harmônico com amplitude de 1  $N$  na extremidade livre da viga. A malha foi discretizada com elementos de 10  $mm$  de comprimento. As propriedades físicas e geométricas da viga estão representadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Propriedades geométricas utilizadas na simulação

Propriedades	
Módulo de Elasticidade $[GPa]$	181.81
Densidade $[\frac{kg}{m^3}]$	7452.8
Comprimento $[mm]$	450.00
Largura $[mm]$	25.48
Espessura $[mm]$	4.90

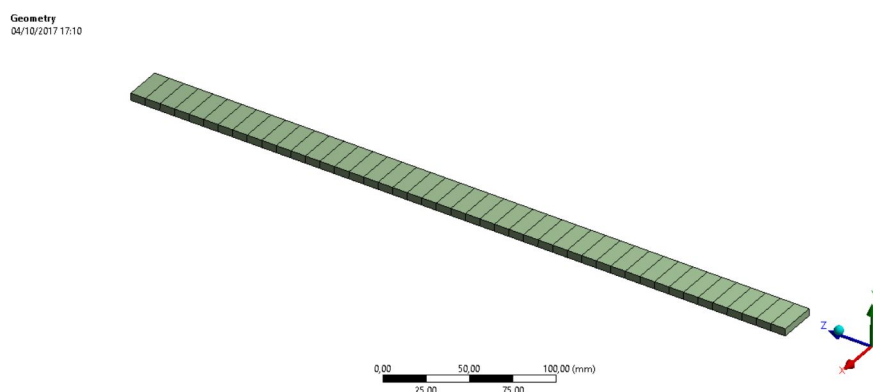


Figura 4.1 – Malha de elemento finitos utilizada para a simulação numérica.

#### 4.1.1.1 Método dos três pontos

Os resultados para a viga livre-livre e engastada estão representados nas Figs. 4.2 a 4.3. Uma força concentrada foi aplicada na extremidade e foram obtidas as FRFs em todos os pontos da malha. Com os dados obtidos através da simulação e utilizando o método dos três pontos, foi possível estimar as curvas de dispersão para diferentes pontos de aquisição  $x_2$  com diferentes espaçamentos  $d$  entre eles, onde  $x_2$  é a posição do ponto de medição central. Uma rotina no software *MatLab* foi utilizada para o tratamento dos dados. A posição do ponto central de aquisição bem como a distância deste dos demais pontos estão representados nas legendas. A importância do ponto central de medição é discutido na seção 5.

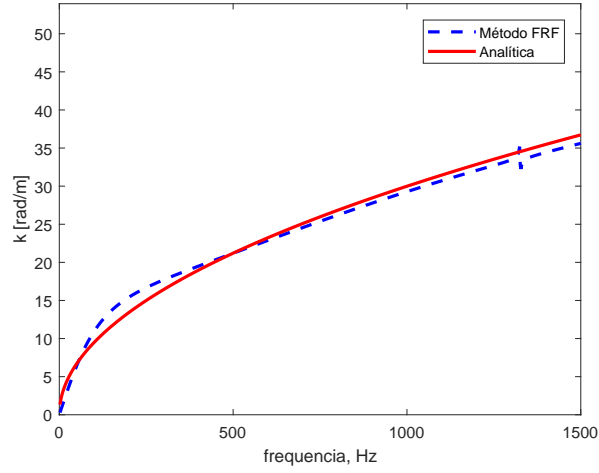


Figura 4.2 – Curva de dispersão em um ponto  $x_2 = 250 \text{ mm}$  e distância entre os demais pontos  $d = 60 \text{ mm}$  para a viga livre-livre.

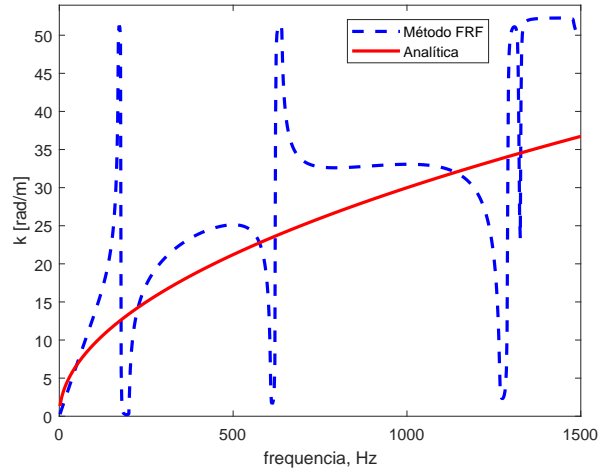


Figura 4.3 – Curva de dispersão em um ponto  $x_2 = 250 \text{ mm}$  e distância entre os demais pontos  $d = 60 \text{ mm}$  para a viga engastada.

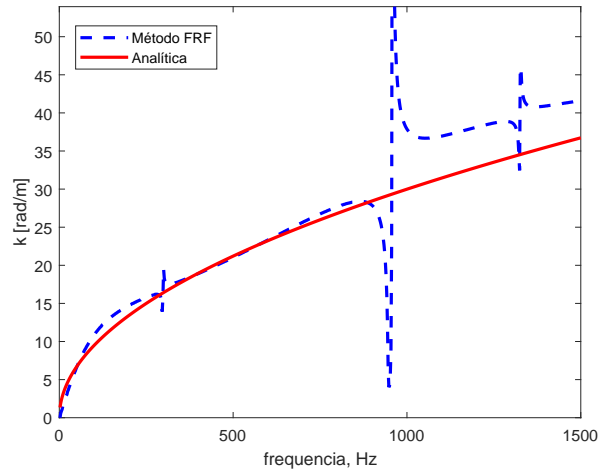


Figura 4.4 – Curva de dispersão em um ponto  $x_2 = 240 \text{ mm}$  e distância entre os demais pontos  $d = 10 \text{ mm}$  para a viga engastada.

#### 4.1.1.2 Método da frequência espacial

Os resultados para a curva de dispersão pelo métodos da transformada de Fourier da ODS estão representados à seguir. O parâmetro  $a$  é o fator de multiplicação pelo comprimento original do sinal quando aplicada a RDFS, foram gerados resultados para dois valores de  $a$  quando aplicada a RDFS e sem a utilização da RDFS, ambos com o *zero padding*. Um gráfico de erro percentual por frequência e um erro médio também está representado nos resultados.

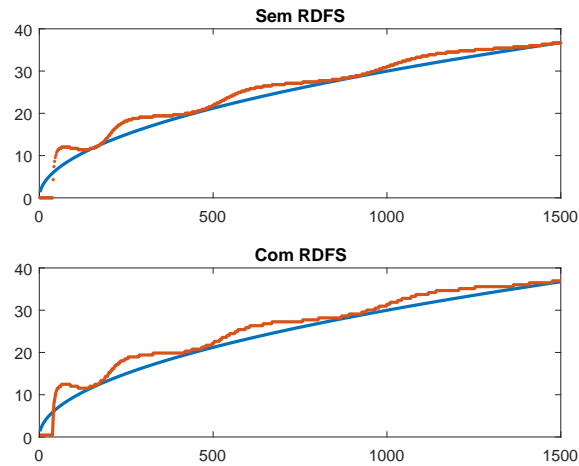


Figura 4.5 – Curvas de dispersão com e sem RDFS para um  $a = 1.5$ .

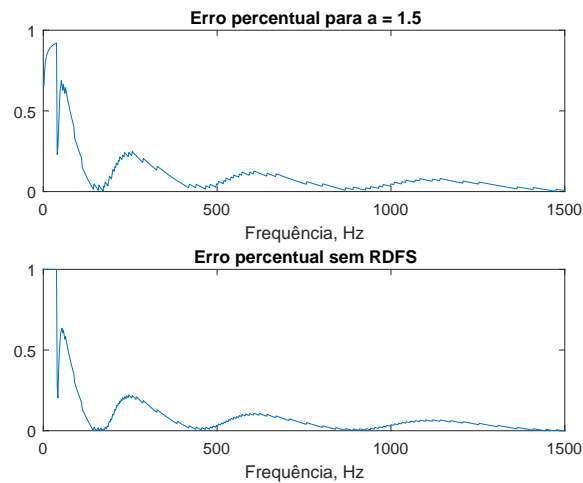


Figura 4.6 – Erro percentual para cada frequência em comparação á curva analítica com e sem RDFS para  $a = 1.5$ . O erro médio com RDFS é de 10.56 % e sem 9.52 %.

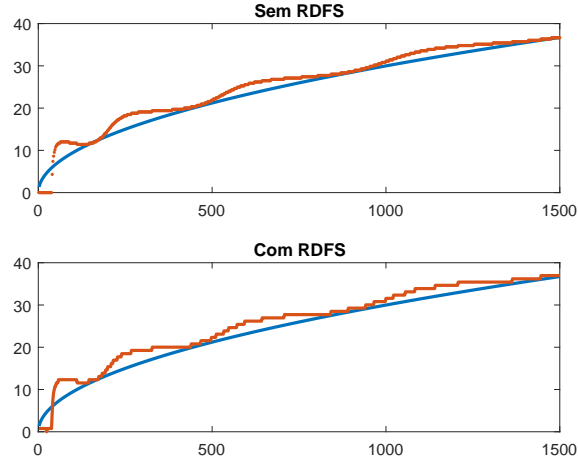


Figura 4.7 – Curvas de dispersão com e sem RDFS para um  $a = 2.5$ .

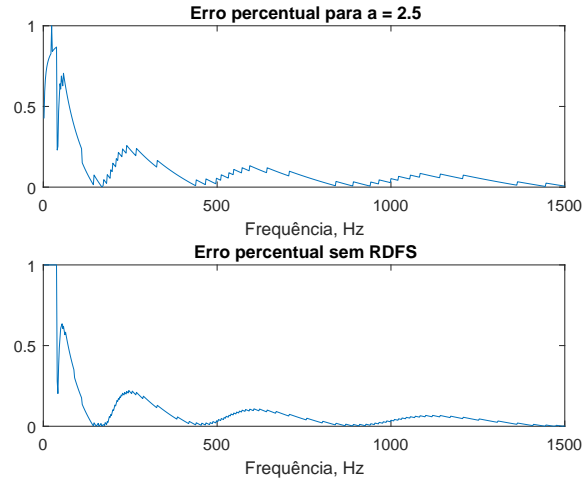


Figura 4.8 – Erro percentual para cada frequência em comparação á curva analítica com e sem RDFS para  $a = 2.5$ . O erro médio com RDFS é de 10.44 % e sem 9.52 %.

#### 4.1.2 Modelo analítico de uma viga simples

Uma rotina no software *MatLab* foi desenvolvida com o modelo analítico de uma viga simples em balanço com o intuito de facilitar a variação dos parâmetros do método experimental e a adição de ruído no modelo para melhor simular o experimento. Foram utilizadas as equações na seção 2.2 para a viga engastada e as propriedades geométricas representadas na tabela 1 com um comprimento de 450 *mm*. Os deslocamentos em função do tempo em qualquer ponto  $x$  da viga eram obtidos e tratados em uma outra rotina de processamento de sinais para obter a FRF via densidade espectral de potência. Por último, as FRFs obtidas eram utilizadas em uma outra rotina para a obtenção das curvas de dispersão. A excitação foi modelada como um impulso dado por um delta de dirac, representado no forçamento como a função  $\text{sinc}(x)$ . O modelo de ruído utilizado foi um centésimo do valor RMS do sinal do tempo multiplicado pela função *randn* do software.



Os três primeiros modos de vibração e os deslocamentos da viga em um instante  $t$  qualquer estão representados nas Figs. 4.9a e 4.10, respectivamente. Três pontos genéricos de aquisição estão representados pelas linhas verticais na Fig. 4.11.

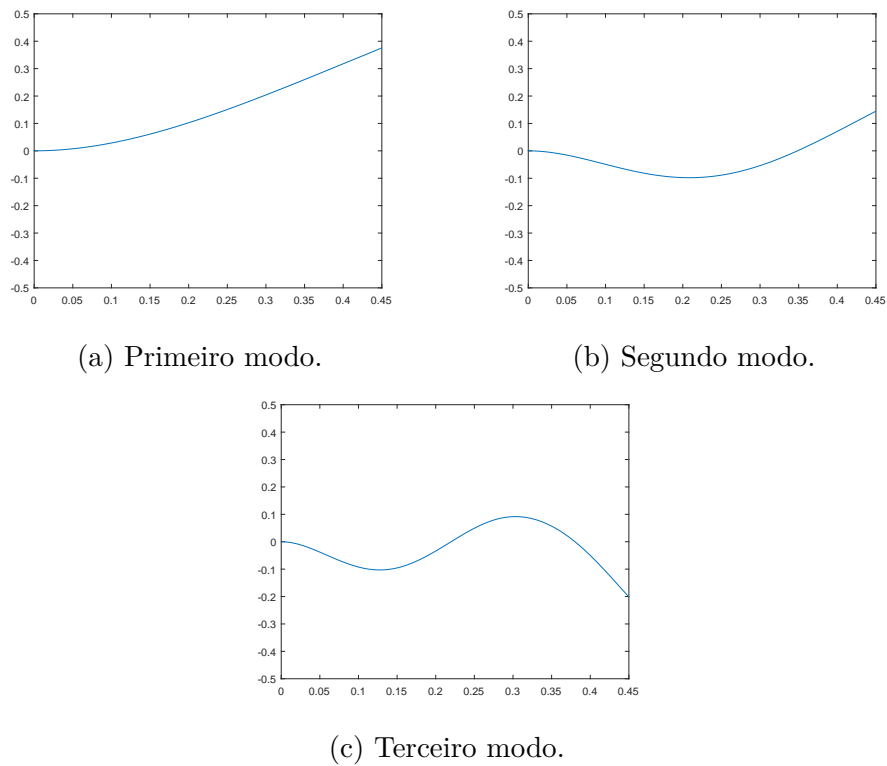


Figura 4.9 – Primeiros modos de vibração de uma viga.

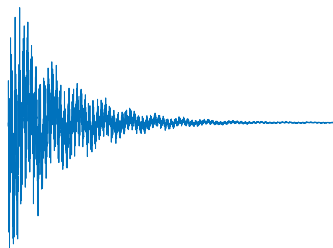


Figura 4.10 – Sinal de deslocamento no tempo de um ponto qualquer do modelo analítico com a adição do ruído.

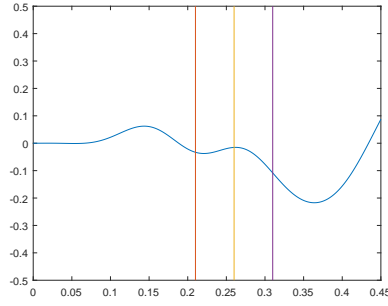


Figura 4.11 – Deslocamento ao longo da viga de modelo analítico sujeita à um impulso unitário. Os pontos adquiridos estão representados como as linhas verticais,  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  respectivamente.

#### 4.1.2.1 Método dos três pontos

Os resultados obtidos com o modelo analítico estão representados nas Figs. 4.12 e 4.13. As curvas de dispersão obtidas através dos sinais sem e com janelamento são comparadas e um ajuste de curva para a Eq. (3.8) foi feito. As curvas ilustradas à seguir foram obtidas utilizando o método dos três pontos a partir do ponto  $x_2 = 220 \text{ mm}$  e distância  $d = 60 \text{ mm}$  entre os demais pontos. É possível observar a importância da aplicação das ferramentas de processamento de sinais comparando as Figs. 4.12 e 4.13, que amenizaram o ruído adicionado no modelo analítico implementado no software *MatLab*.

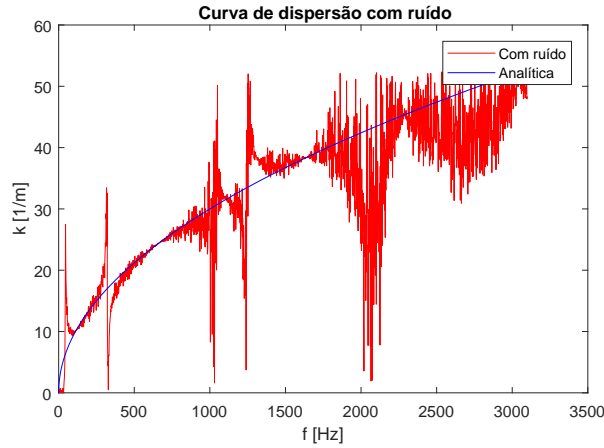


Figura 4.12 – Curva de dispersão sem o tratamento de sinal.

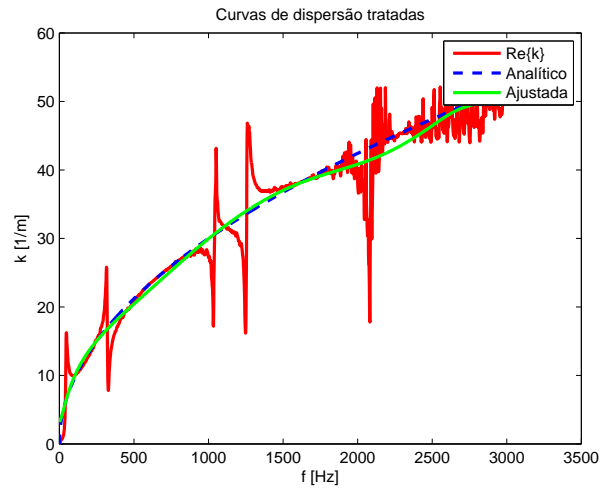


Figura 4.13 – Curva de dispersão com o tratamento de sinal.

Nas Figs. 4.14 e 4.16, estão as curvas para diferentes valores de  $x_2$  e de  $d$ , todas já com o tratamento dos sinais:

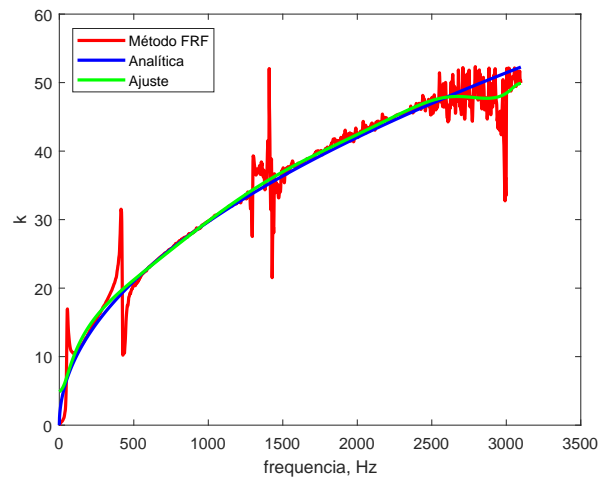


Figura 4.14 – Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas. As FRFs foram retiradas dos pontos  $x_2 = 240 \text{ mm}$ ,  $d = 60 \text{ mm}$ .

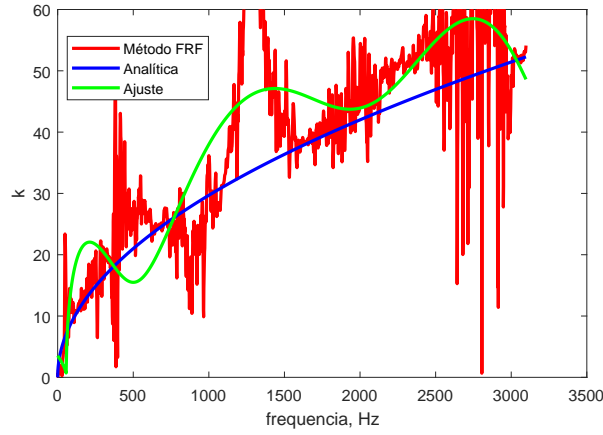


Figura 4.15 – Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas. As FRFs foram retiradas dos pontos  $x_2 = 240 \text{ mm}$ ,  $d = 10 \text{ mm}$ .

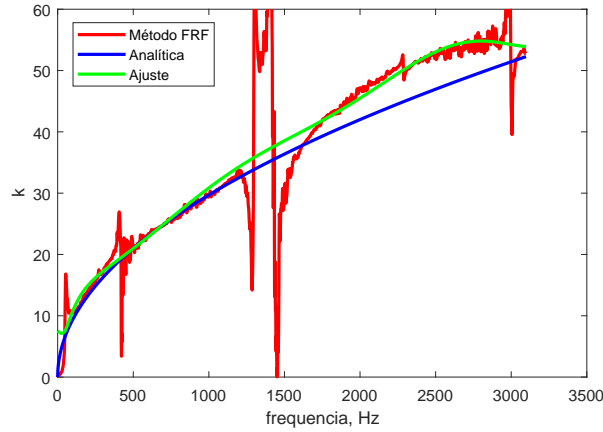


Figura 4.16 – Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas. As FRFs foram retiradas dos pontos  $x_2 = 250 \text{ mm}$ ,  $d = 30 \text{ mm}$ .

### 4.1.3 Modelo analítico de uma viga com ressonadores

O modelo analítico para descrever o comportamento da viga com ressonadores foi obtido a partir da Eq. 2.27, e os dados geométricos e de material utilizados foram os mesmo da viga de metamaterial utilizada nos experimentos e estão descritas na tabela 3. A partir desse modelo, é possível determinar a curva de dispersão dada pela Eq. 2.32 e apresentada na Fig. 4.17. As demais curvas de dispersão foram determinadas a partir do método dos três pontos utilizando a expressão para a FRF de uma estrutura com ressonadores, discutida na seção 2.4.1. Um amortecimento estrutural da ordem de  $10^{-3}$  foi adicionado à estrutura para melhor aproximação com a realidade.

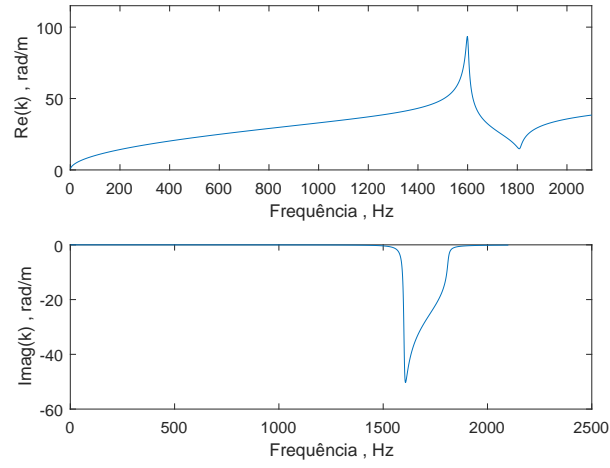


Figura 4.17 – Curva de dispersão obtida a partir da Eq. 2.32

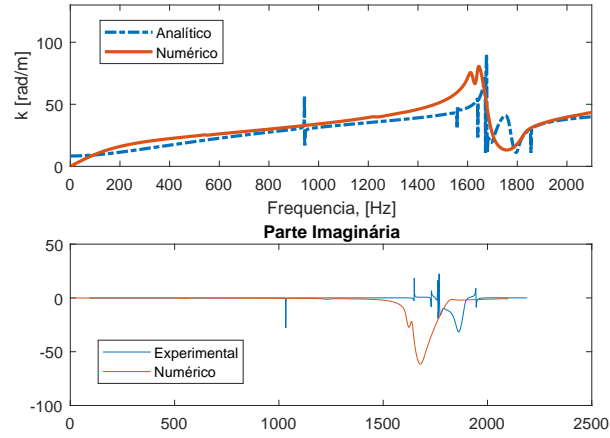


Figura 4.18 – Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas para viga com ressonadores. As FRFs foram retiradas do ponto central  $x_2 = 180 \text{ mm}$  com distância  $d = 30 \text{ mm}$  dos demais pontos.

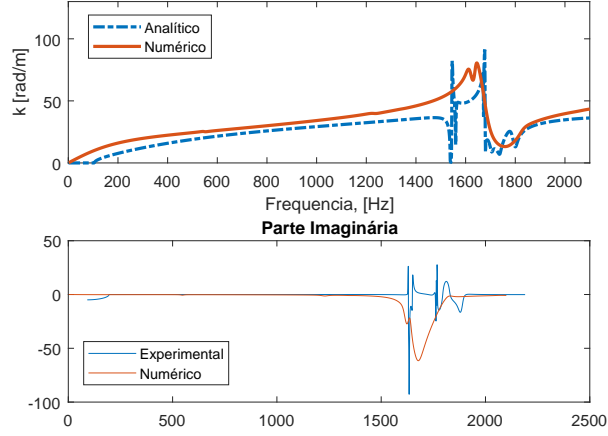


Figura 4.19 – Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas para viga com ressonadores. As FRFs foram retiradas do ponto  $x_2 = 220 \text{ mm}$  com distância  $d = 30 \text{ mm}$  dos demais pontos.

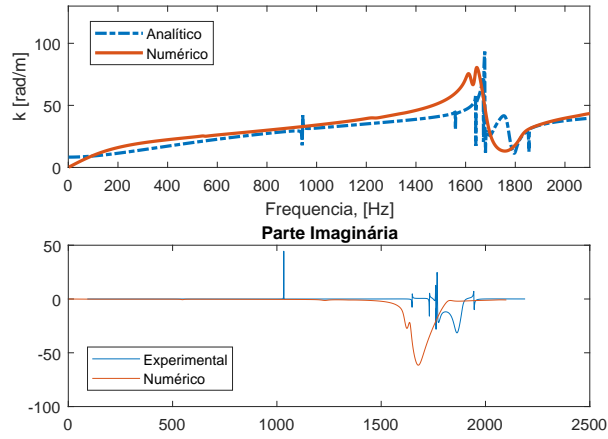


Figura 4.20 – Curva de dispersão para o modelo numérico a partir das relações analíticas para viga com ressonadores. As FRFs foram retiradas dos pontos  $x_2 = 190 \text{ mm}$  e  $d = 20 \text{ mm}$ .

## 4.2 Resultados experimentais

Nesta seção são apresentados os resultados experimentais obtidos a partir de vigas de aço e poliamida. Para cada viga foi realizado um experimento com diferentes transdutores pois os níveis de vibração da viga de aço são muito diferentes quando comparados aos das vigas I de material sinterizado. Note que a caracterização experimentais em estruturas leves, como é o caso das vigas de poliamida, constitui um desafio à parte. Por isso, para esses casos, mais de um setup experimental, com diferente instrumentação, foi utilizado.

Para a viga de aço de seção retangular, o experimento foi realizado utilizando um martelo de impacto e um acelerômetro para duas diferentes condições de contorno, com ambas as extremidades livres e com uma extremidade engastada e a outra livre. Para as vigas sinterizadas de perfil I, com e sem ressonadores, foi utilizado um shaker eletrodinâmico para excitar a estrutura, e para adquirir a resposta da viga foram utilizados um acelerômetro e um vibrômetro laser. Os dados técnicos dos equipamentos estão representados na tabela 2.

Tabela 2 – Especificação dos instrumentos utilizados nos experimentos.

Instrumento	Dados Técnicos
Vibrômetro Laser Doppler	Modelo: LaserPolytec PDV 100
Shaker TIRA Vib	Modelo: TV 50018
Martelo Piezoelétrico	Modelo: PCB Ponteira: Nylon
Acelerômetro	Modelo: PCB 352C33
Placa de Aquisição de Dados (DAQ)	Modelo: Polytec VIB-E-220
Software de Aquisição de Dados	Modelo: Vibsoft 5.5 Modelo: LabView

As propriedades geométricas e de material das vigas foram previamente identificadas em outros trabalhos desenvolvidos no laboratório de vibrações do Grupo de Dinâmica de Sistemas. As propriedades da viga de poliamida foram obtidas em (SILVA, 2017) e da viga de aço em (TRAVI, 2017) e são apresentadas na tabela 3.

Tabela 3 – Propriedades das vigas utilizadas no experimento.

Propriedades	Viga de aço	Viga de poliamida
Módulo de Elasticidade [ <b>GPa</b> ]	181.81	1.28
Densidade [ $\frac{kg}{m^3}$ ]	7452.80	792.02
Comprimento [ <b>mm</b> ]	447.00	330.00
Largura [ <b>mm</b> ]	25.48	16.95
Altura [ <b>mm</b> ]	4.90	15.94

#### 4.2.1 Viga de aço

Nesta seção, são apresentados os resultados de estimação do número de onda obtidos com as medidas experimentais. Os resultados para a viga de aço foram comparados com a curva analítica descrita pela Eq. 2.16, enquanto que para a viga de metamaterial, a comparação foi feita com o resultado numérico.

Para o método dos três pontos, serão exploradas diferentes arranjos de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . Como esses pontos são igualmente espaçados, eles podem ser representados por  $x_2$ , como o ponto central e  $d$ , a distância entre os pontos. Será mostrado que a qualidade dos resultados de estimação dependem da escolha adequada desses parâmetros.

Foram utilizadas duas condições de contorno com a viga de aço, uma com a condição de contorno engastada-livre e no segundo com as duas extremidades livres.

#### 4.2.1.1 Condição de contorno engastada

Para a viga engastada, a resposta foi medida em 10 pontos, cada um distante de  $d = 30 \text{ mm}$  entre um e outro, a partir do ponto na posição  $x_2 = 40 \text{ mm}$  até a posição de  $x_2 = 240 \text{ mm}$ . As curvas de dispersão foram traçadas para todas as combinações de distância entre os pontos de medição com o método do ajuste paramétrico via FRF. Em seguida, foi utilizado o método via FFT da ODS, com e sem a utilização da RDFS. As Figs. 4.22 e 4.23 apresentam uma amplitude FRF e coerência ordinária típica para a viga engastada. O número de pontos e a frequência de aquisição para o experimento foram  $f_s = 6000 \text{ Hz}$  e  $N = 7679$ .



Figura 4.21 – *Set-up* experimental para a viga engastada.



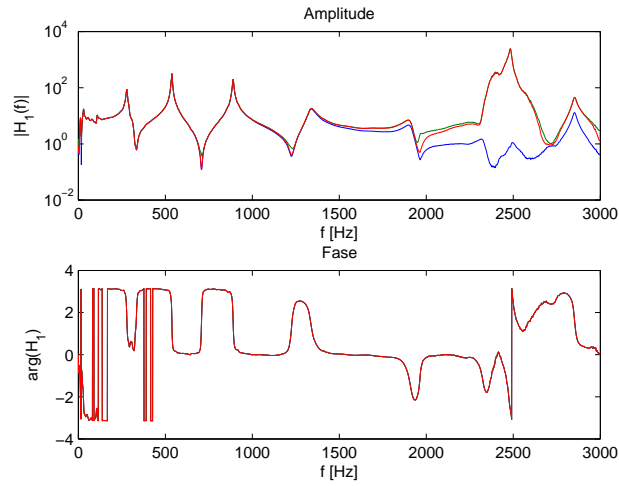


Figura 4.22 – Típica amplitude da FRF para a viga engastada para um dos pontos medidos.

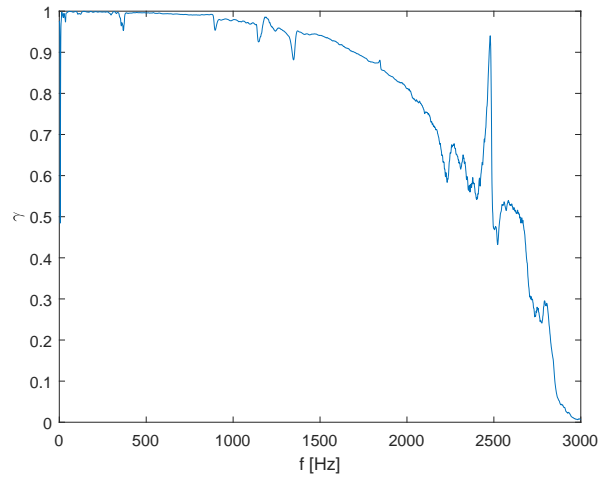


Figura 4.23 – Típica função de coerência para a viga engastada para um dos pontos medidos.

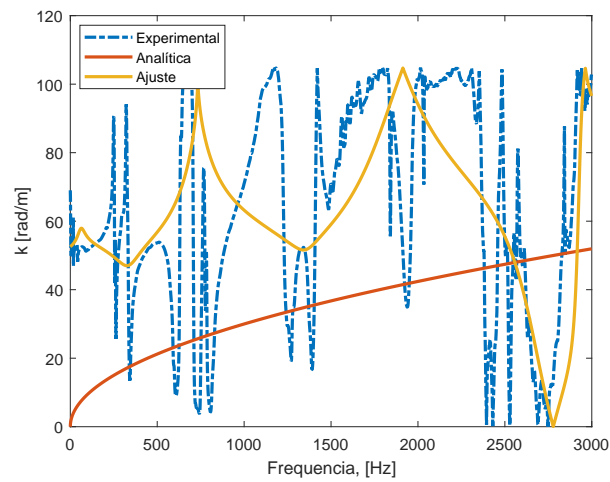


Figura 4.24 – Curva de dispersão via método dos três pontos com ponto central  $\mathbf{x}_2 = 70mm$  e  $d = 30\text{ mm}$  para a viga engastada.

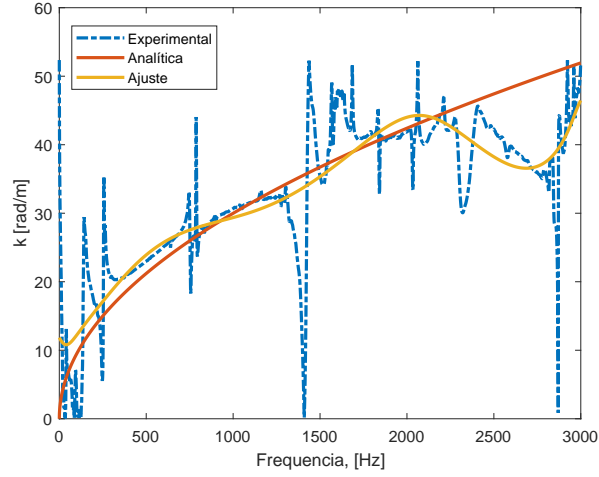


Figura 4.25 – Curva de dispersão via método dos três pontos com ponto central  $x_2 = 130\text{mm}$  e  $d = 60\text{ mm}$  para a viga engastada.

#### 4.2.1.2 Condição de contorno livre-livre

Para esse caso, o experimento foi realizado com a viga de aço livre-livre em uma espuma de modo a gerar a condição de contorno livre-livre. Foram medidos pontos com distância de **20 mm** entre eles, a partir da posição de  $x_2 = 100\text{ mm}$  da viga até o ponto  $x_2 = 420\text{ mm}$ . De maneira análoga ao experimento com a viga engastada, as curvas de dispersão foram traçadas para todos os pontos com o método dos três pontos e via FFT da ODS, com e sem a RDFS. As Figs. 4.27 e 4.28 apresentam uma amplitude FRF e coerência ordinária típica para a viga livre-livre. O número de pontos e a frequência de amostragem foram  $N = 7679$  e  $f_s = 6000\text{ Hz}$ .



Figura 4.26 – *Set-up* experimental para a viga livre-livre.

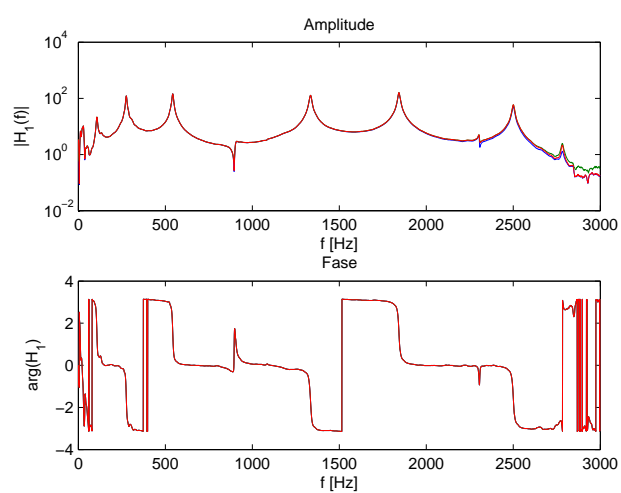


Figura 4.27 – Função resposta em frequência para a viga livre-livre, medida em um dos pontos de aquisição.

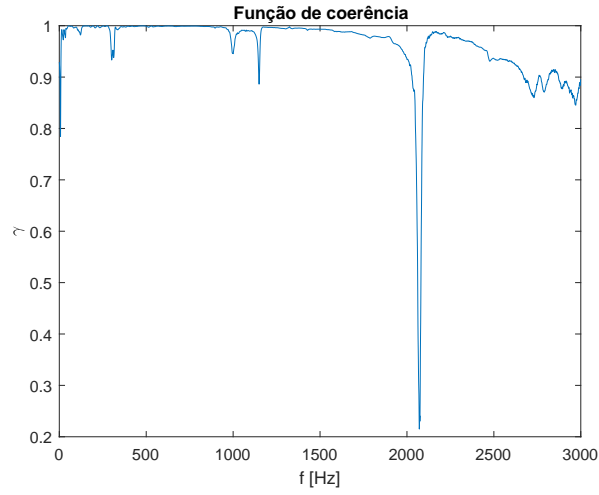


Figura 4.28 – Função de coerência para a FRF representada na figura 4.27.

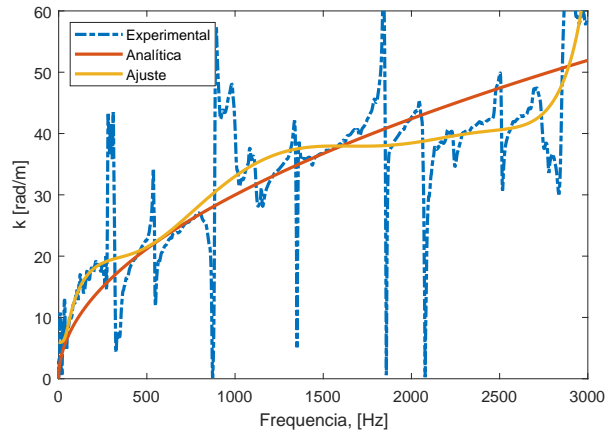


Figura 4.29 – Curva de dispersão via método dos três pontos com ponto central  $\mathbf{x}_2 = 220mm$  e  $d = 40 mm$  para a viga livre-livre.

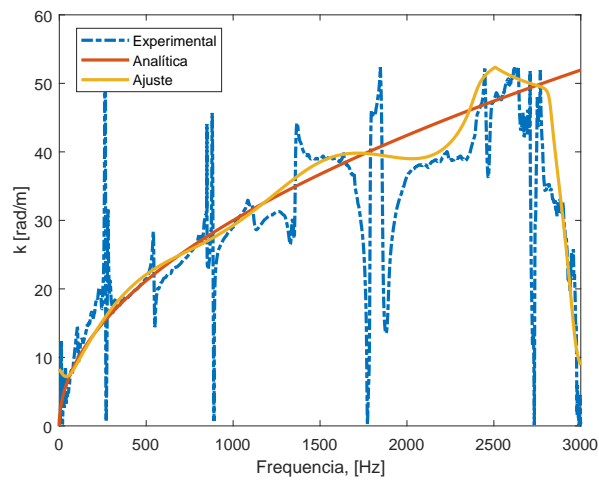


Figura 4.30 – Curva de dispersão via método dos três pontos com ponto central  $\mathbf{x}_2 = 180mm$  e  $d = 60 mm$  para a viga livre-livre.

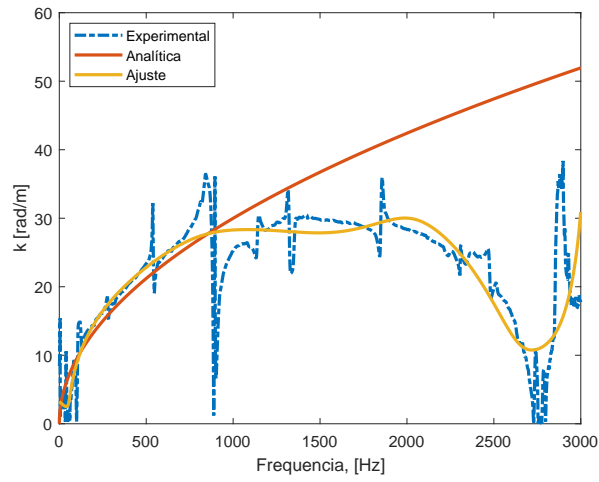


Figura 4.31 – Curva de dispersão via método dos três pontos com ponto central  $x_2 = 280$  *mm* e  $d = 80$  *mm* para a viga livre-livre.

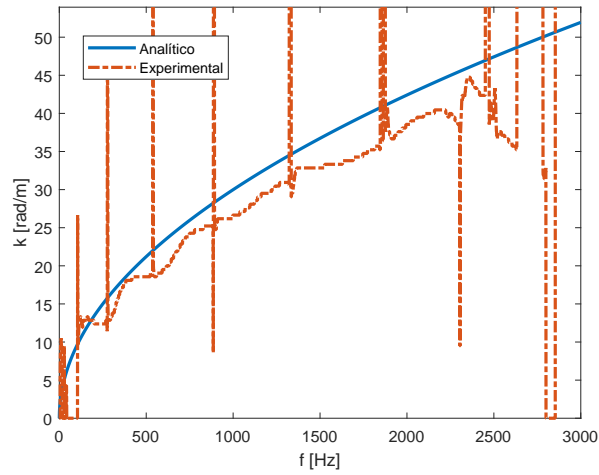


Figura 4.32 – Curva de dispersão via Transformada de Fourier da ODS sem a utilização da RDFS para a viga livre-livre.

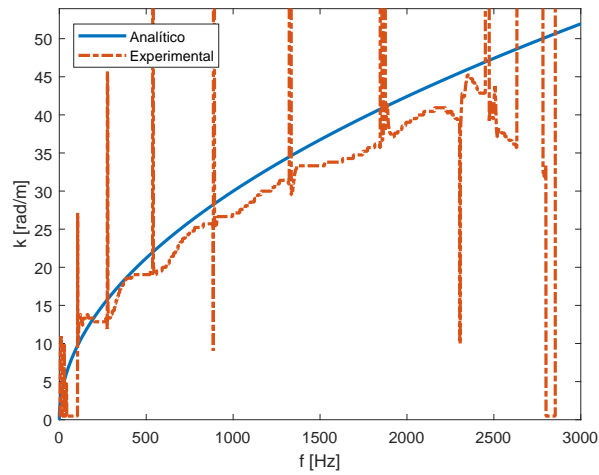


Figura 4.33 – Curva de dispersão via Transformada de Fourier da ODS com a utilização da RDFS para a viga livre-livre.

## 4.2.2 Viga de poliamida com perfil I

Para as vigas de poliamida, foram utilizados dois setups experimentais. O primeiro, com um mini-shaker eletrodinâmico com um acelerômetro medindo a excitação de entrada e um vibrômetro laser medindo a resposta ao longo da estrutura. No segundo setup, foram utilizados um mini-martelo e um mini-acelerômetro.

### 4.2.2.1 Experimento inicial

Para a viga de poliamida com perfil I sem os ressonadores, o experimento foi realizado com o shaker eletrodinâmico devido à baixa sensibilidade do martelo de impacto e as FRF estimadas utilizam a medida de um acelerômetro como entrada, posicionado no shaker, e a medida de velocidade de um vibrômetro laser LDV. Para a excitação, um gerador de sinais foi utilizado para gerar um chirp com frequência de 0 a 2 kHz. Foram medidos 15 pontos, com distância de  $d = 22 \text{ mm}$  entre eles, a partir do ponto de posição  $x_2 = 33 \text{ mm}$  até o ponto de posição  $x_2 = 297 \text{ mm}$ . As figuras 4.35 e 4.36 apresentam uma amplitude FRF e coerência ordinária típica para a viga livre-livre. Novamente, foram traçadas as curvas de dispersão para todas as combinações de pontos via o método dos três pontos e via o método da Transformada de Fourier da ODS, com e sem a RDFS, apresentados nas Figs. 4.37 e 4.38. A frequência de amostragem e o número de pontos foram  $f_s = 4273 \text{ Hz}$  e  $N = 40000$ .

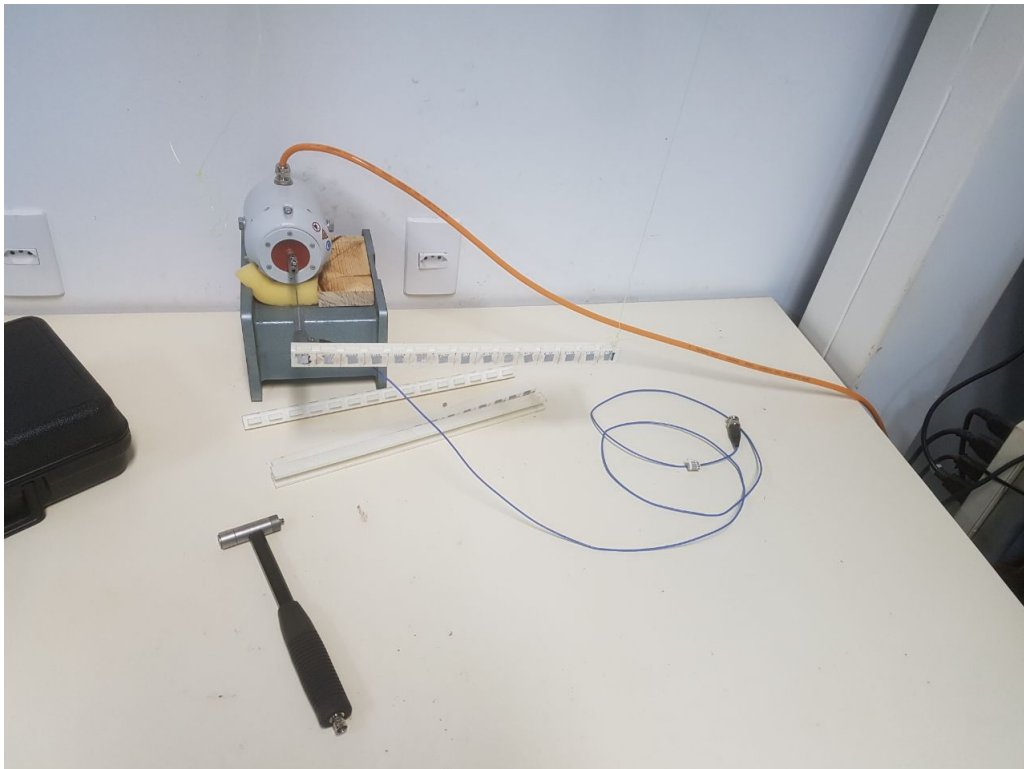


Figura 4.34 – *Set-up* experimental preliminar para as vigas de poliamida.

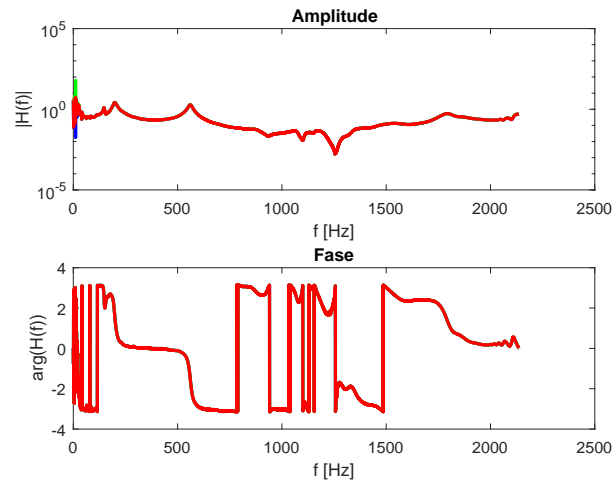


Figura 4.35 – Função resposta em frequência para a viga de perfil I, medida em um dos pontos

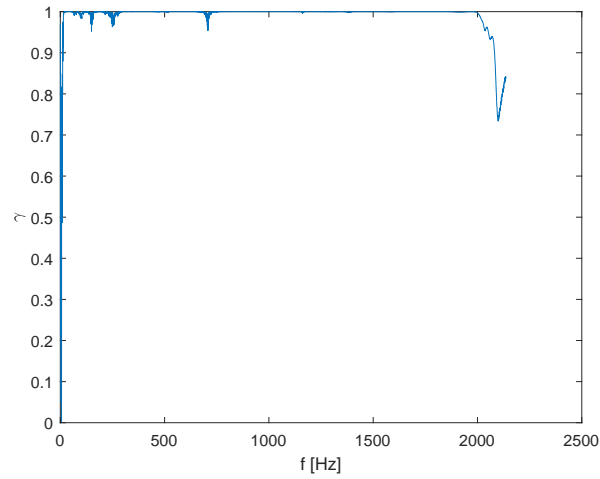


Figura 4.36 – Função de coerência para a FRF da figura 4.35.

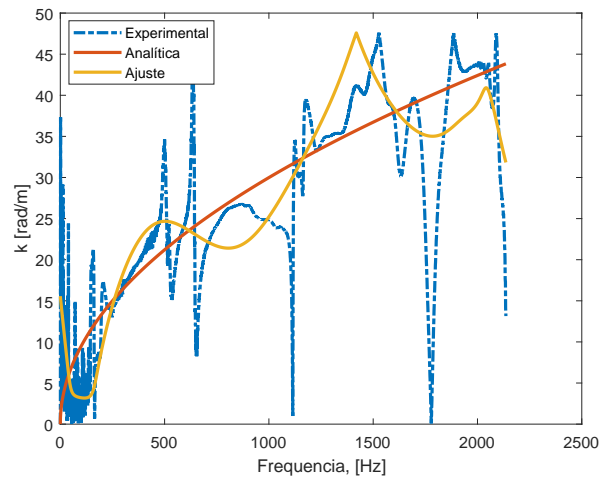


Figura 4.37 – Curva de dispersão via método dos três pontos e ajuste paramétrico para o ponto central  $x_2 = 99 \text{ mm}$  e  $d = 66 \text{ mm}$  para a viga em I.

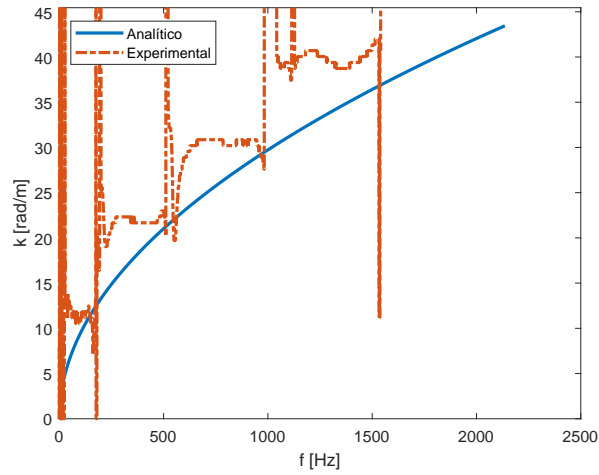


Figura 4.38 – Curva de dispersão para a viga em I via método da Transformada de Fourier da ODS sem a implementação da RDFS.

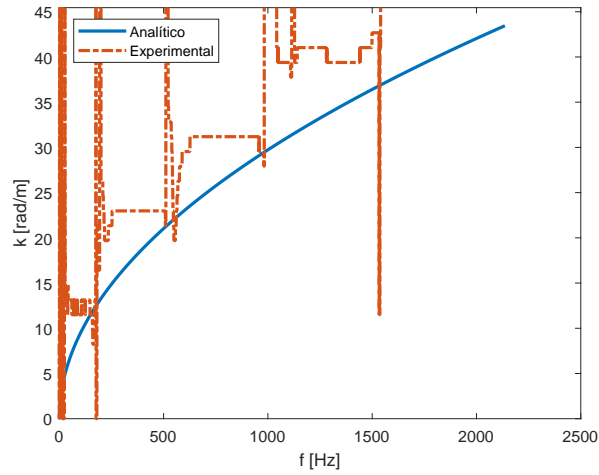


Figura 4.39 – Curva de dispersão para a viga em I via método da Transformada de Fourier da ODS com a implementação da RDFS.

#### 4.2.2.2 Experimento final

Por fim, com o auxílio de um martelo de impacto e um acelerômetro mais sensíveis, foi realizado um experimento com as vigas de poliamida com e sem ressonadores, possibilitando sua caracterização com maior precisão. As especificações da instrumentação estão representadas na tabela 4.





minação da curva de dispersão da viga de poliamida com perfil I. As figuras à seguir mostram os resultados obtidos pelo método dos três pontos, da Transformada de Fourier da ODS e da correlação 1D respectivamente.

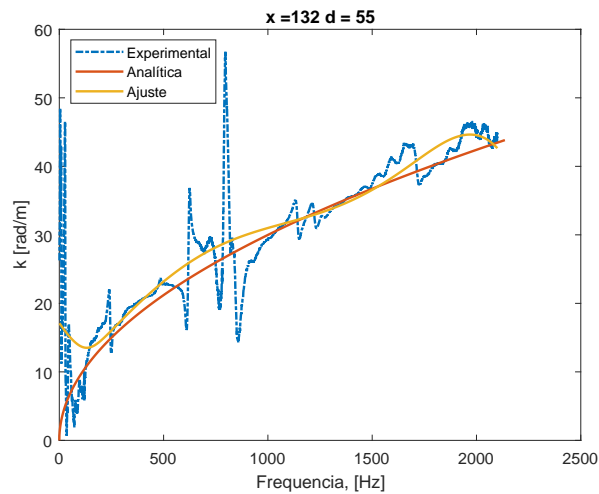


Figura 4.41 – Curva de dispersão obtida pelo método dos três pontos obtida à partir do ponto central  $x_2 = 132mm$  com espaçamento  $dx = 55mm$  entre os demais pontos.

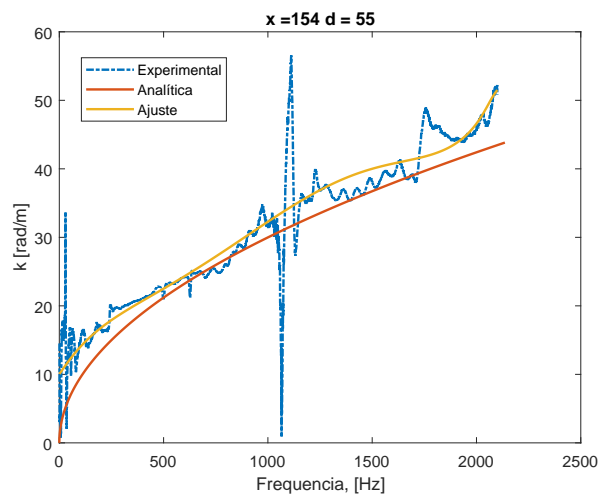


Figura 4.42 – Curva de dispersão obtida pelo método dos três pontos obtida à partir do ponto central  $x_2 = 154mm$  com espaçamento  $dx = 55mm$  entre os demais pontos.

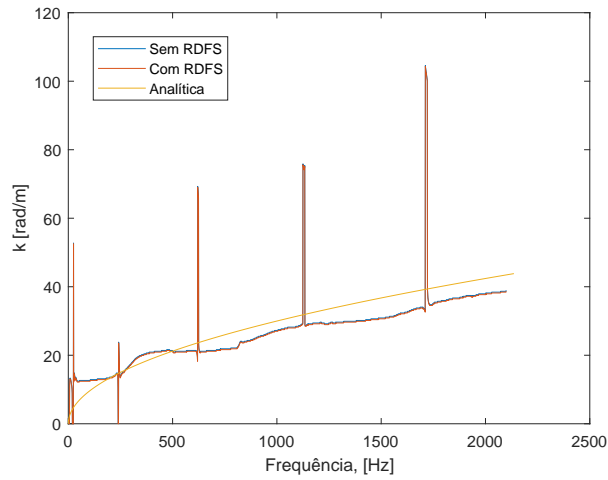


Figura 4.43 – Curva de dispersão experimental obtida via Transformada de Fourier da ODS.

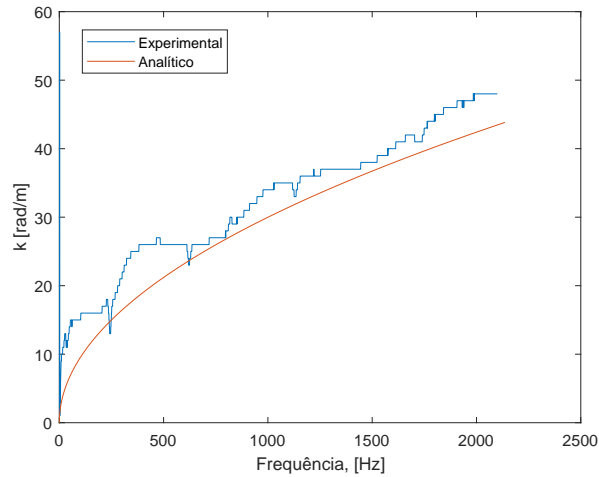


Figura 4.44 – Curva de dispersão experimental obtida via correlação.

### 4.2.3 Viga de poliamida com ressonadores

Para a viga de poliamida com ressonadores, foi utilizada a mesma abordagem experimental que a utilizada para a viga de perfil I.

#### 4.2.3.1 Experimento inicial

Para a viga de poliamida com ressonadores também foi utilizado o setup com o shaker, acelerômetro para medir a entrada e o LDV para medir a saída, a fim de reduzir os efeitos da adição de massa do acelerômetro. Os pontos de medição estavam a uma distância de  $d = 22 \text{ mm}$ , e foram medidos do ponto de posição  $x_2 = 33 \text{ mm}$  até o ponto  $x_2 = 297 \text{ mm}$ , com um total de 15 pontos. As curvas de dispersão foram traçadas pelos dois métodos e comparadas com a curva de dispersão numérica, obtida via

elementos finitos (OLIVEIRA, 2017). A Fig. 4.45 apresenta a parte real e parte imaginária da curva de dispersão utilizando o método dos três pontos, com as FRF obtida a partir da simulação numérica em elementos finitos da viga de metamaterial. As Figs. 4.46 e 4.47 apresentam uma amplitude FRF e coerência ordinária típica para esse ensaio. Novamente, foram traçadas as curvas de dispersão para todas as combinações de pontos via o método dos três pontos e via o método da FFT da ODS, com e sem a RDFS, apresentados nas Figs. 4.49 a 4.53. A frequência de amostragem e o número de pontos foram  $f_s = 4273$   $Hz$  e  $N = 40000$  e o *set-up* experimental foi o mesmo da Fig. 4.34.

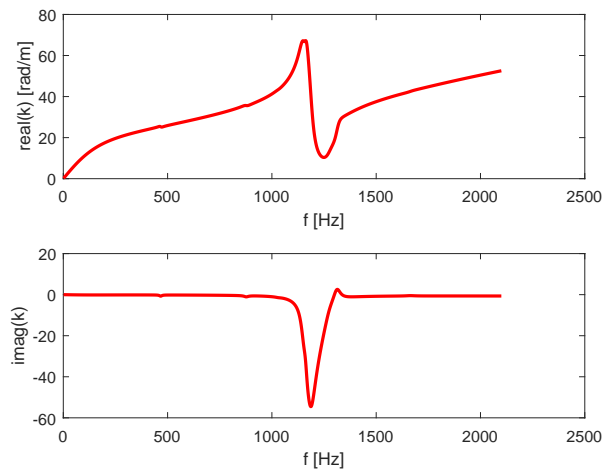


Figura 4.45 – Parte real (cima) e imaginária da curva de dispersão para a viga de material, utilizando a FRF dos pontos  $x_2 = 121$   $mm$  e  $d = 44$   $mm$  com os dados da simulação numérica.

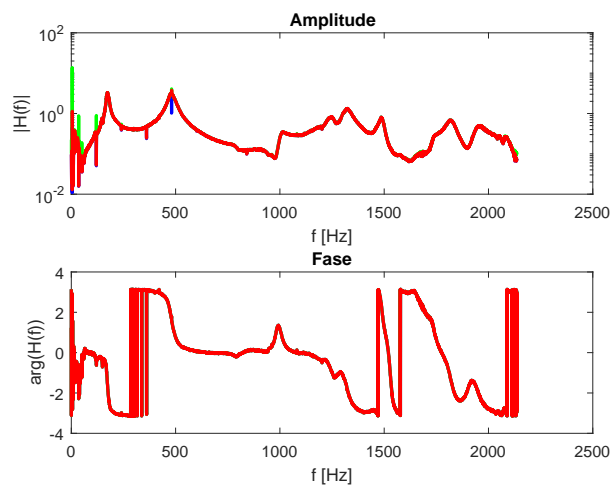


Figura 4.46 – Função resposta em frequência em um dos pontos da viga de metamaterial.

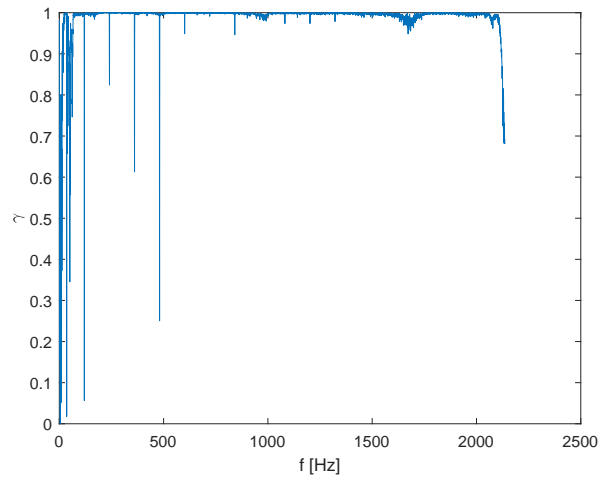


Figura 4.47 – Função de coerência para a FRF da figura 4.46.

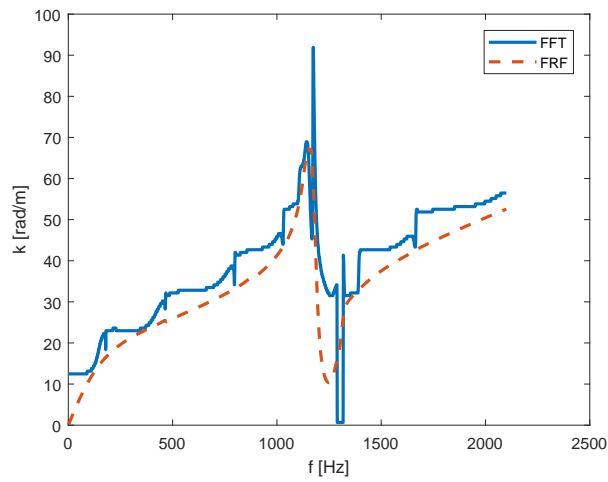


Figura 4.48 – Comparação entre a curva de dispersão obtida via o método dos três pontos e o método da FFT da ODS com os dados da simulação numérica.

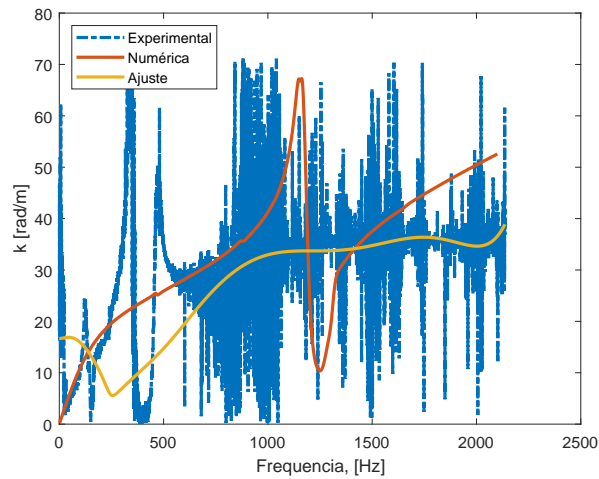


Figura 4.49 – Curva de dispersão para a viga de metamaterial, utilizando a FRF dos pontos  $x_2 = 77 \text{ mm}$  e  $d = 44 \text{ mm}$ .

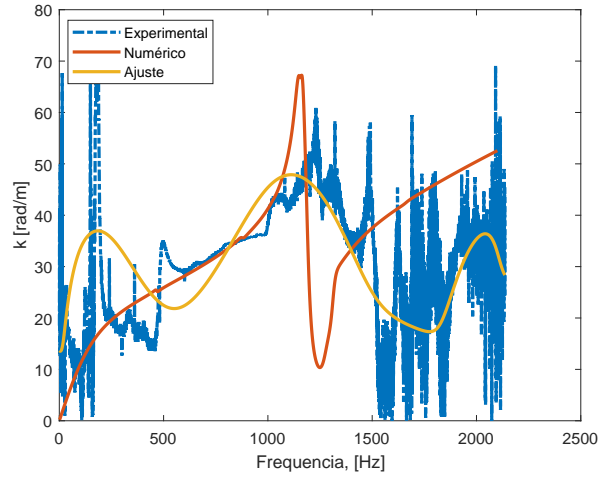


Figura 4.50 – Curva de dispersão para a viga de metamaterial, utilizando a FRF dos pontos  $x_2 = 99 \text{ mm}$  e  $d = 44 \text{ mm}$ .

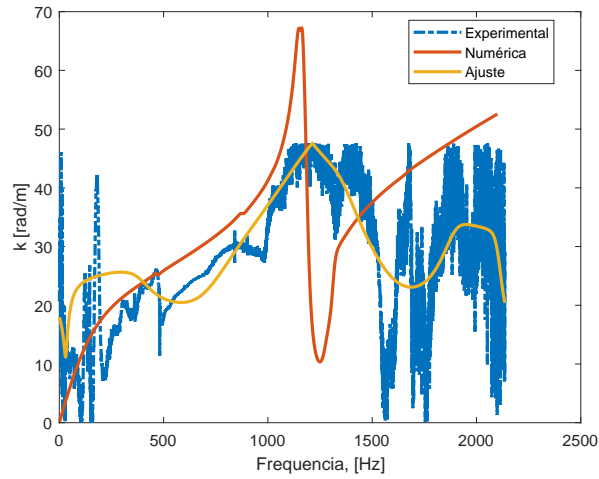


Figura 4.51 – Curva de dispersão para a viga de metamaterial, utilizando a FRF dos pontos  $x_2 = 121 \text{ mm}$  e  $d = 44 \text{ mm}$ .

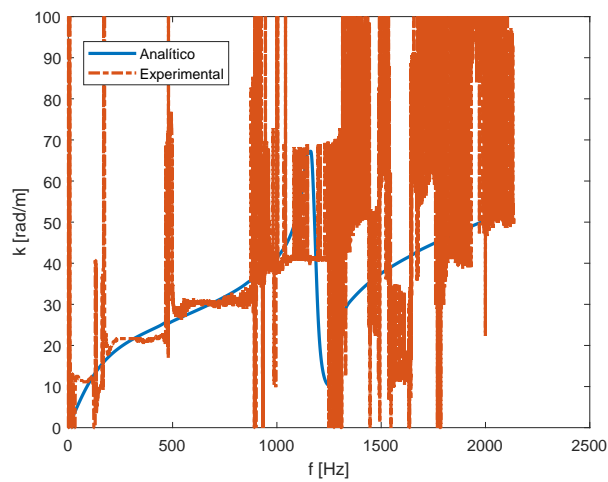


Figura 4.52 – Curva de dispersão sem a utilização da RDFS.

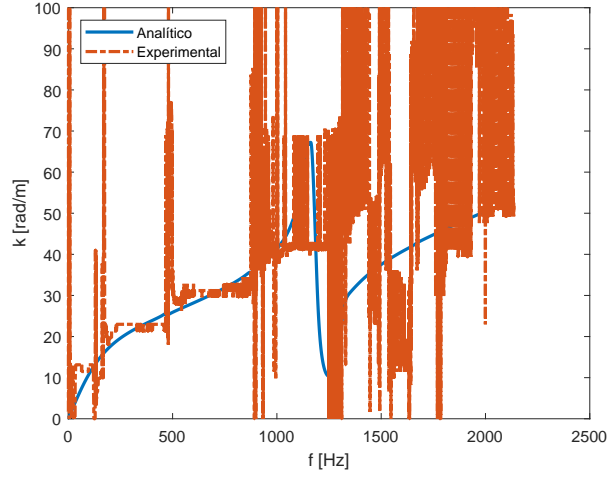


Figura 4.53 – Comparação entre as curvas de dispersão experimental via FFT da ODS com RDFS e a numérica via FRF e ajuste paramétrico da Eq. 3.7.

#### 4.2.3.2 Experimento final

Para a viga de metamaterial foram aplicados os mesmo métodos aplicados para a viga de poliamida com perfil I sem ressonadores. Foram utilizados cinco diferentes *set-ups* para verificar a influência das condições de contorno, em todos variou-se o tipo de espuma utilizado para obter a condição de contorno livre-livre e também o local de aplicação do forçamento. As figuras à seguir mostram os resultados obtidos pela técnica dos três pontos, da FFT da ODS e da correlação 1D respectivamente, na legenda está descrita a característica da espuma utilizada e o ponto  $\mathbf{x}_f$  de aplicação do forçamento. A frequência de amostragem e o número de pontos utilizados foram, respectivamente,  $f_s = 6000Hz$  e  $N = 7680$ . O *set-up* experimental utilizado foi o mesmo da Fig. 4.40

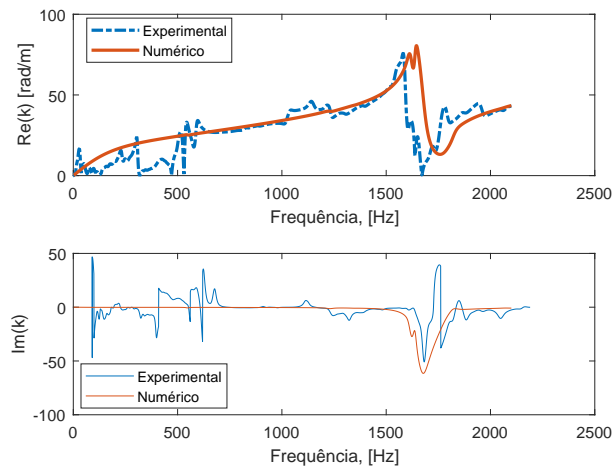


Figura 4.54 – Curva de dispersão obtida via técnica dos três pontos a partir do ponto central  $\mathbf{x}_2 = 110mm$  com distância de  $\mathbf{d} = 33mm$  entre os demais. Foi utilizada uma espuma mais rígida e a excitação aplicada no ponto  $\mathbf{x}_f = 55mm$

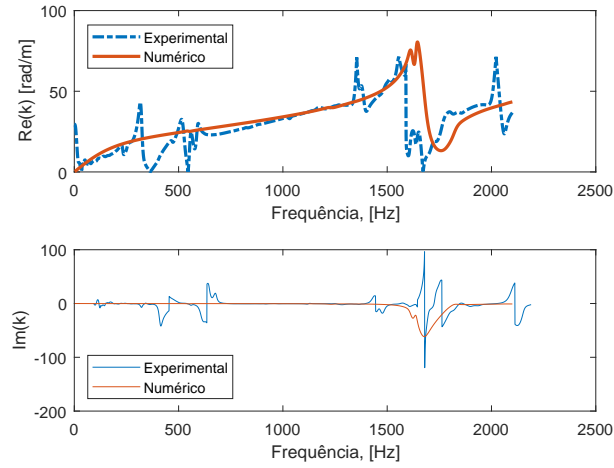


Figura 4.55 – Curva de dispersão obtida via técnica dos três pontos a partir do ponto  $x_2 = 110mm$  com distância de  $d = 44mm$  entre os demais. As condições do experimento foram as mesmas da Fig. 4.54.

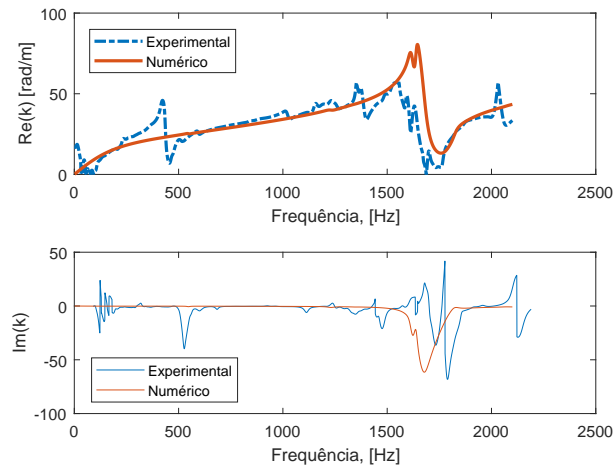


Figura 4.56 – Curva de dispersão obtida via técnica dos três pontos a partir do ponto central  $x_2 = 176mm$  com distância de  $d = 55mm$  entre os demais. As condições do experimento foram as mesmas da Fig. 4.54.



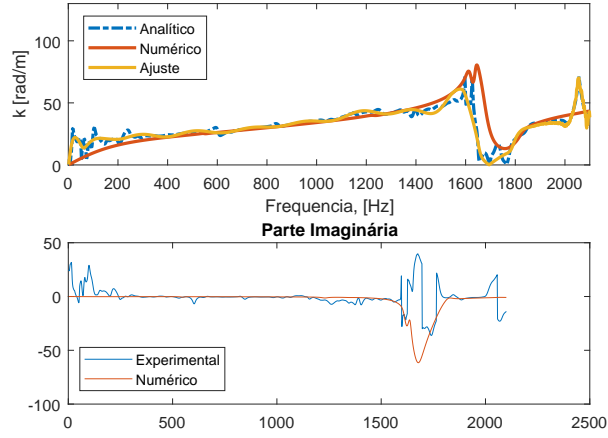


Figura 4.57 – Curva de dispersão obtida via técnica dos três pontos a partir do ponto central  $x_2 = 187mm$  com distância de  $d = 44mm$  entre os demais. Foi utilizada uma espuma menos rígida com menor amortecimento, e ponto de aplicação do forçamento foi em  $x_f = 55mm$ .

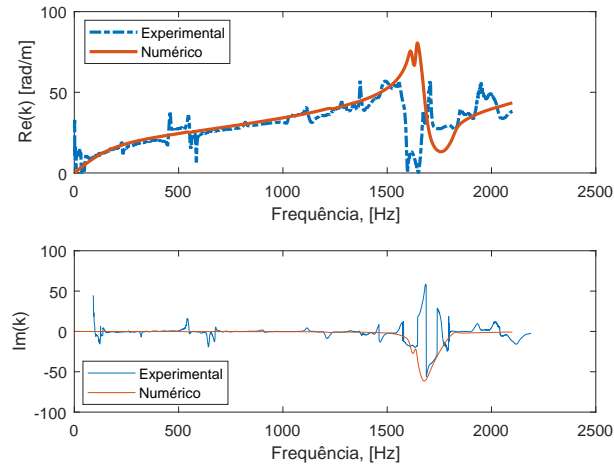


Figura 4.58 – Curva de dispersão obtida via técnica dos três pontos a partir do ponto central  $x_1 = 99mm$  com distância de  $d = 55mm$  entre os demais. Foi utilizada uma espuma menos amortecida com ponto de aplicação da força em  $x_f = 11mm$ .

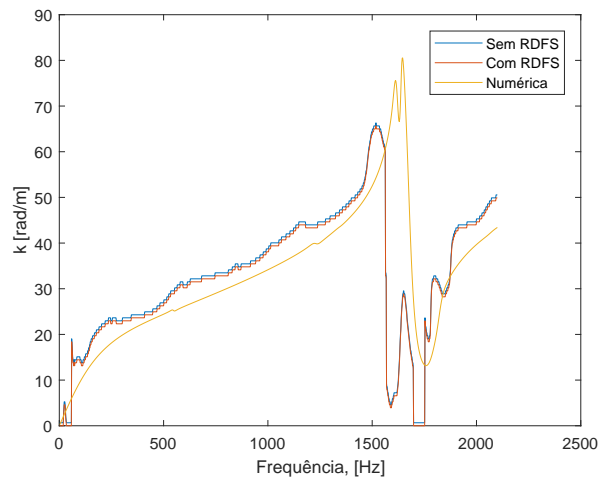


Figura 4.59 – Curva de dispersão experimental obtida via FFT da ODS.

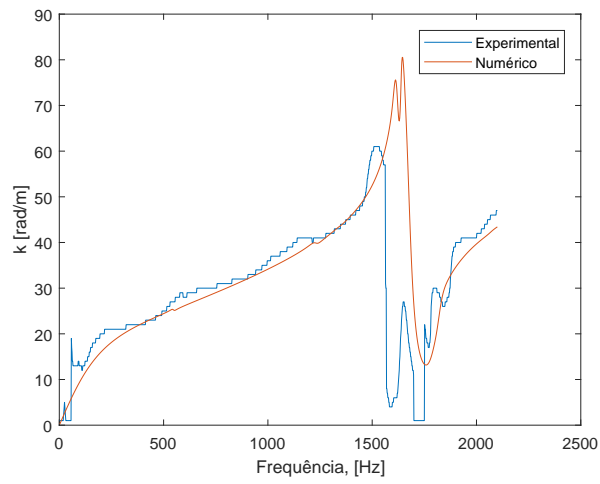


Figura 4.60 – Curva de dispersão experimental obtida via correlação.

## 5 DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Neste capítulo, os resultados numéricos e experimentais são discutidos. Algumas análises dos métodos são apresentadas, dentre elas o máximo e mínimo número de onda possível de medir, a influência dos pontos de medição e da distância entre eles no método dos três pontos com ajuste paramétrico da Eq. 3.7 e a influência das condições dos experimentos nos resultados.

### 5.1 Máximo e Mínimo número de onda mensurável

Assim como a discretização de um sinal no tempo influencia na máxima frequência mensurável, a discretização de um sinal no espaço influencia no máximo número de onda. Se analisarmos a relação estabelecida na Eq. 2.1, podemos fazer uma analogia com a frequência de Nyquist, ou seja, a máxima frequência observável no espectro de um sinal temporal é determinado pela metade do menor período presente no sinal. Dessa forma, determinamos o máximo número de onda, dado um espaçamento  $\mathbf{dx}$  entre dois pontos de aquisição na viga, pela relação

$$\mathbf{k}_{max} = \frac{\pi}{\mathbf{dx}}. \quad (5.1)$$

Podemos observar esse efeito nas Figs. 4.3 e 4.31. Na figura 4.31 podemos observar uma boa aproximação da curva experimental e analítica até o número de onda de aproximadamente  $\mathbf{k} = 37$  rad/m, isso ocorre pois  $\mathbf{dx} = 80$  mm e portanto  $\mathbf{k}_{max} = 39,25$  rad/m pela relação da Eq. (5.1). O mesmo ocorre na Fig. 4.3, as duas curvas numérica e analítica se aproximam até o número de onda  $\mathbf{k} = 52$  rad/m, e pela relação (5.1) temos  $\mathbf{k}_{max} = 52,333$  rad/m.

Já o mínimo número de onda mensurável está limitado por dois principais fatores. O primeiro é a presença de ondas evanescentes, isto é, ondas que não se propagam ou ondas de campo próximo, que não transportam energia e decaem exponencialmente com a posição, sendo mais relevantes próximas ao contorno e ao forçamento. Elas estão associadas à parte imaginária do número de onda e não são considerada na expressão para estimar a curva de dispersão via método dos três pontos. O outro fator é o grande comprimento de onda das ondas mecânicas que se propagam na estrutura para baixas

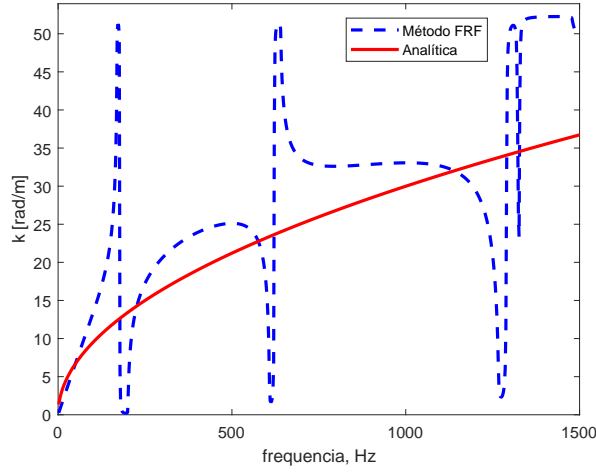


Figura 4.3 – Curva de dispersão em um ponto  $x_2 = 250 \text{ mm}$  e distância entre os demais pontos  $d = 60 \text{ mm}$  para a viga engastada.

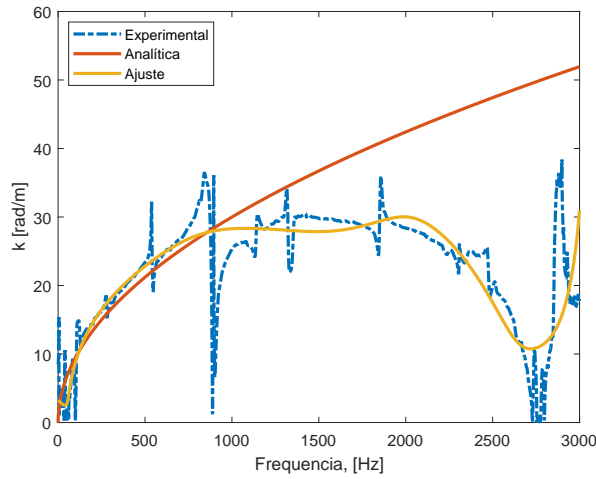


Figura 4.31 – Curva de dispersão em um ponto  $x_2 = 280 \text{ mm}$  e distância entre os demais pontos  $d = 80 \text{ mm}$  para a viga livre-livre.

frequências. Se o espaçamento entre os pontos de aquisição for pequeno, eles não irão "perceber" a presença da onda, visto que a diferença de amplitude da onda entre eles também será pequena. No âmbito experimental, um distanciamento pequeno entre os pontos de aquisição também pode gerar resultados ruidosos. Como as amplitudes das ondas se tornam próximas entre dois acelerômetros próximos, o ruído pode se sobrepor a diferença de amplitude entre os pontos (KALKOWSKI, 2017).

## 5.2 Influência dos Parâmetros

Os resultados experimentais para o método dos três pontos são influenciados por dois parâmetros, a distância entre os pontos de aquisição  $d$  e o ponto central da viga que está sendo medido  $x_2$ . A influência da distância foi discutida no tópico acima, determinando um limite superior e inferior para o número de onda estimado. Quanto a posição

dos pontos medidos, é preciso escolher uma combinação de pontos onde o deslocamento do ponto central não possua amplitude próxima de zero para nenhuma frequência, visto que pela relação dada em 3.8, isso acarreta em uma singularidade, fazendo com que a relação tenda ao infinito. Como não é possível saber de ante-mão em quais pontos isso ocorre, é necessária a medição em diversos pontos igualmente espaçados da estrutura, para se obter a curva de dispersão com diversas combinações de pontos, ou obter a melhor combinação a partir de uma simulação numérica prévia. De maneira geral observa-se que pontos próximos às extremidades e ao forçamento geram piores resultados, possivelmente por conta da influência de ondas evanescentes. A tabela à seguir mostra como a curva de dispersão estimada a partir da Eq. 3.8 é influenciada pelo ponto central de medição e a distância dos demais pontos. A figura superior é a curva de dispersão e a inferior é o  $\cos(kd)$  e a amplitude da FRF do ponto  $x_2$ . Os dados utilizados foram retirados da simulação numérica para a viga de seção retangular discutida na seção de resultados numéricos.

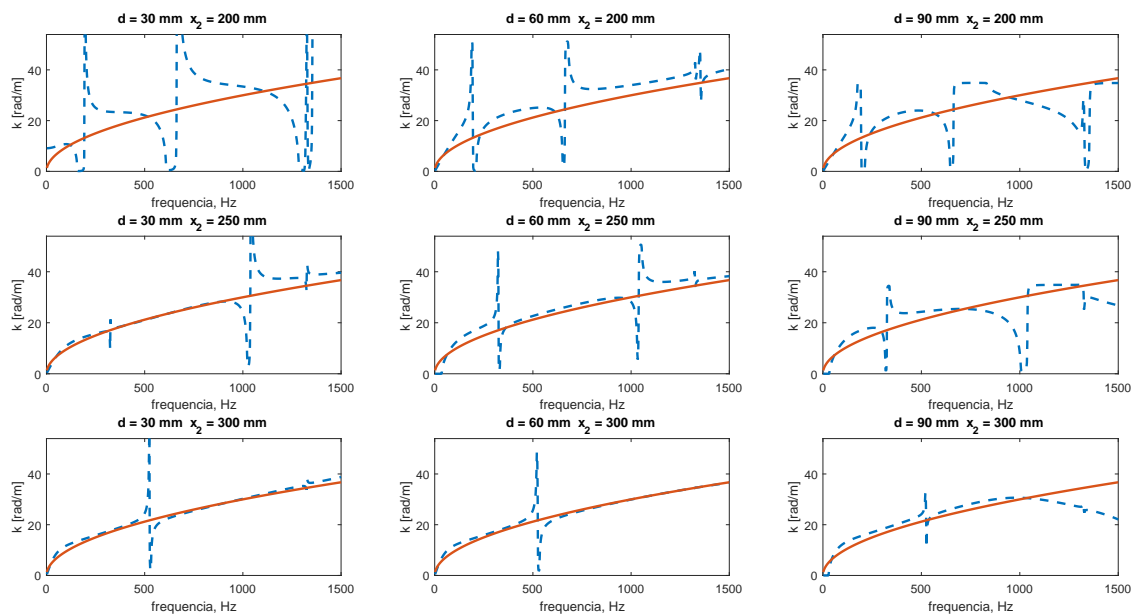


Figura 5.1 – Influência do ponto central de medição e da distância entre os demais pontos para o método da FRF.

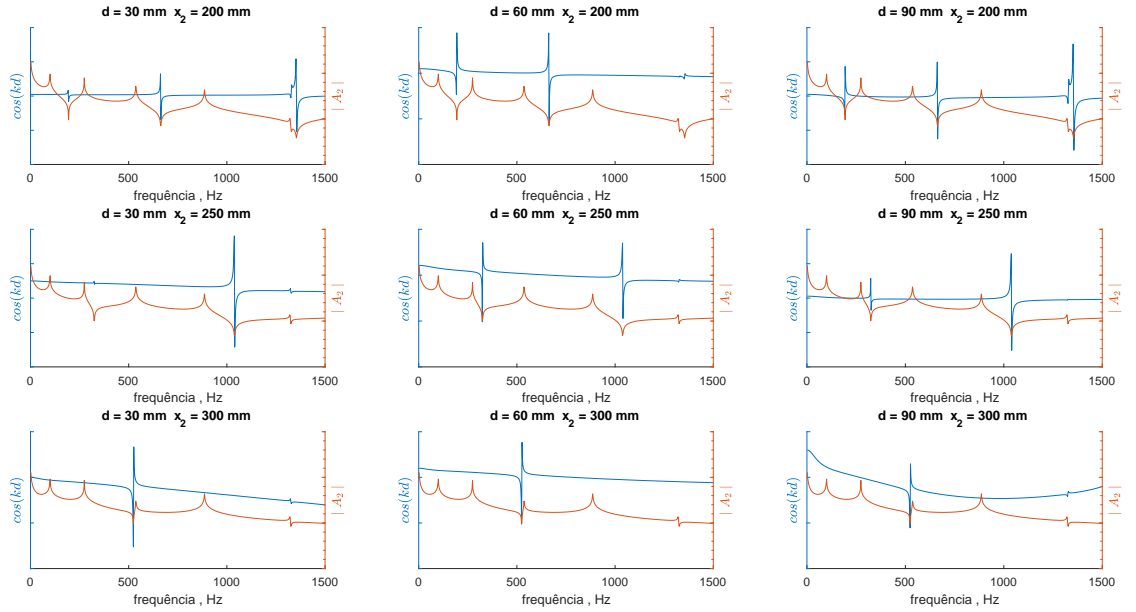


Figura 5.2 – Influência da FRF do ponto central e da relação  $\cos(kd)$ .

Para o método da frequência espacial da ODS da estrutura, podemos observar uma boa aproximação, no entanto, observa-se uma oscilação da curva experimental em relação a numérica ou analítica. Esses efeitos podem estar relacionados com a interpolação causada pelo *zero padding*.

A aplicação da RDFS ameniza o efeito da interpolação, e pode melhorar um pouco o erro entre as curvas analíticas e numéricas, como visto na Fig. 4.8. A escolha do parâmetro  $\mathbf{P}$  é automática e depende em qual número de onda ocorre a maior amplitude da transformada do sinal espacial, já o parâmetro  $\mathbf{a}$  é arbitrário e tem a necessidade de se testar alguns valores para achar qual irá gerar resultados com menor erro. Para essa aplicação a técnica de RDFS não apresentou muitas melhoras na estimação do número de onda, apesar de sua eficácia para limpar ruído de sinais espaciais e remover o efeito do *leakage* como visto na Fig. 3.5, a aplicação da FFT no sinal reconstruído resultou em um número de onda muito próximo do sinal original.

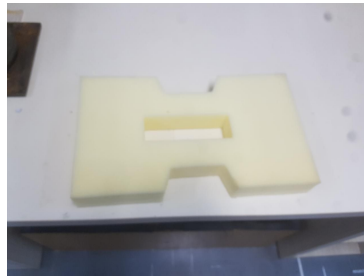
Já o método de correlação, muito utilizado na estimação de número de onda em placas, apresentou excelentes resultados, tendendo às curvas numéricas para todas as frequências. Entretanto, ele requer milhões de iterações para estimar o número de onda, sendo uma desvantagem quando há a necessidade de se estimar várias estruturas ou diferentes *set-ups*.

Outra desvantagem das técnicas da frequência espacial da ODS e da correlação é que não é possível obter a parte imaginária do número de onda, essencial para se fazer análises pela abordagem de propagação de ondas, como discutido no Apêndice B. A parte imaginária também é útil para a detecção do *band-gap* uma vez que ele é próximo de zero exceto na região de atenuação, onde há presença somente de ondas evanescentes.

### 5.3 Condições experimentais

Um fator crucial para a obtenção de boas curvas de dispersão é a condição do experimento. A qualidade dos resultados para a viga de metamaterial melhorou consideravelmente após a utilização de uma nova instrumentação e pode-se observar a influência das espumas utilizadas e do ponto de aplicação da força nos resultados.

Para a espuma com maior amortecimento pode-se observar uma maior oscilação na resposta do sistema para baixas frequências, enquanto que para a espuma mais macia o espectro todo ficou com uma resposta mais constante.

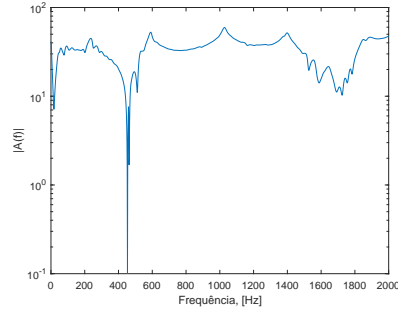


(a) Espuma com maior amortecimento.

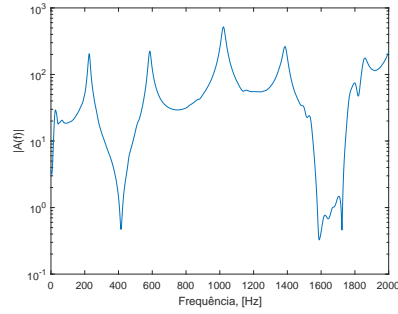


(b) Espuma com menor amortecimento.

Figura 5.3 – Comparação entre as duas espumas utilizadas para realizar o experimento.



(a) FRF no ponto  $x = 319mm$  utilizando a espuma com maior amortecimento.



(b) FRF no ponto  $x = 319mm$  utilizando a espuma com menor amortecimento.

Figura 5.4 – Influência da espuma na FRF da estrutura.

Os métodos podem ser aplicados para quaisquer condições de contorno, no entanto algumas irão gerar melhores resultados do que outras, como por exemplo, a viga livre-livre e a viga engastada, onde a viga livre-livre mostrou resultados mais próximos à curva numérica. É importante garantir que não haja influência de outros fatores nas respostas do sistema como amortecimento ou um contorno mal definido.



## 6 CONCLUSÃO

Todos os métodos geraram resultados numéricos e experimentais com boa proximidade dos resultados analíticos dados pela Eq. 2.16. O método dos três pontos exige, no entanto, que uma simulação preliminar seja feita para determinar os melhores pontos de medição, ou a necessidade de medir vários pontos, o que pode se tornar trabalhoso dependendo da estrutura em análise. O distanciamento entre os pontos também é importante, como discutido na seção 5, visto que estes irão determinar qual é o máximo e mínimo número de onda detectável pelo experimento e a qualidade dos resultados e o ponto central de medição que irá determinar quantas singularidades estarão presentes na curva visto que esse fator depende se há pontos de ressonância ou anti-ressonância ao longo da resposta em frequência do sistema.

Já o método utilizando a frequência espacial da ODS da estrutura gerou resultados próximos aos resultados analítico e numérico, no entanto, apresentou uma certa oscilação, distanciando o número de onda real do medido para algumas frequências. A aplicação da RDFS apresentou uma pequena melhora nos resultados, sendo importante a adição de zeros (*zero padding*) no vetor de dados no espaço para que se tenha uma melhor discretização no domínio do número de onda. O aumento artificial do período e a filtragem pela escolha do número de linhas espectrais também contribuem para amenizar o *leakage* e suavizar a curva mas não melhoraram a precisão do número de onda estimado. Como também já foi discutido, através desse método não é possível obter a parte imaginária do número de onda.

A técnica de correlação apresentou excelentes resultados para as viga de poliamida, com erros máximos de  $\pm 5 \text{ rad/m}$  para algumas frequências. Essa técnica exige que sejam medidos vários pontos ao longo da estrutura em análise e necessita de milhões de iterações para gerar a curva de dispersão, visto que ele calcula o coeficiente de correlação a partir de diversas tentativas de números de ondas para cada frequência.

De maneira geral, o método mais adequado para caracterização do número de onda em uma estrutura de metamaterial é o método dos três pontos.

Outro desafio para a determinação experimental precisa do número de onda é o próprio experimento. A montagem e o tratamento dos dados é fundamental para gerar bons resultados. No caso da viga de aço, podemos observar a influência da condição de contorno imposta, por exemplo, ao comparar os resultados da viga de aço engastada e

livre. É interessante lembrar que o uso de acelerômetros adiciona massa à viga, podendo dar resultados com pequenas diferenças do modelo numérico ou analítico, nesse caso, o uso do vibrômetro laser se faz útil, visto que esse equipamento não necessita estar acoplado ao sistema. Porém, o vibrômetro está sujeito à erros de desalinhamento e ajuste do foco do laser. A sensibilidade do equipamento também é de fundamental importância como visto na seção 4 onde após a implementação do novo equipamento a qualidade dos resultados melhorou consideravelmente.

No âmbito de metamateriais, a utilização da instrumentação de maior sensibilidade resultou em curvas de dispersão experimentais bem mais próximas às numéricas em relação a utilização do shaker eletrodinâmico e um acelerômetro menos sensível e de maior massa. A frequência onde ocorre o *band-gap* pôde ser identificada na região de **1600 Hz** apresentando pequena discrepância com a curva numérica, provavelmente causada pelo efeito da variabilidade de massa e rigidez entre os ressonadores na viga utilizada nos experimentos. No entanto, é necessário fazer um bom ajuste da curva estimada para que se possa utilizá-la em um modelo de propagação de ondas e avaliar a resposta forçada de um sistema.

## 6.1 Sugestões de trabalhos futuros

Algumas investigações complementares podem ser feitas a partir das análises realizadas nesse trabalho, dentre elas a aplicação dos métodos em guias de onda com mais de um tipo de onda presente, como por exemplo ondas longitudinais e ondas cisalhantes. A partir das curvas de dispersão experimentais é possível realizar a análise da resposta forçada em estruturas de metamaterial e verificar a validade dos resultados. Por fim, identificar a curva de dispersão em estruturas 2D, como placas ou cascas, a partir dos métodos discutidos nesse trabalho.

## 6.2 Trabalhos publicados ou submetidos

CONEM 2018 - Congresso Nacional de Engenharia Mecânica

NEVES, A. D. ; MATOS, P. C.; FABRO, A. T. Experimental investigation of the wave propagation in beams undergoing flexural vibration. mar. 2018.

CREEM 2018 - Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica

MATOS, P. C. ; FABRO, A. T. Comparação de modelo numéricos de metamateriais estruturais com experimento. jul. 2018 (Submetido)

# Referências

- ARRUDA, J. R. F. A robust one-dimensional regressive discrete Fourier series. nov. 2009. Citado na página 19.
- BATISTA, F. et al. One-dimensional smoothing technique associating regressive discrete Fourier series and empirical mode decomposition. *17th International Congress on Sound and Vibration 2010, ICSV 2010*, v. 5, p. 3587–3594, jan. 2010. Citado na página 19.
- FABRO, A. et al. Uncertainty analysis of band gaps for beams with periodically distributed resonators produced by additive manufacturing. set. 2016. Citado na página 1.
- FAHY, F. J.; GARDONIO, P. *Sound and Structural Vibration, Second Edition: Radiation, Transmission and Response*. 2. ed. [S.l.]: Academic Press, 2007. ISBN 978-0-12-373633-8. Citado 3 vezes nas páginas iv, 4 e 5.
- GAO, Y.; BRENNAN, M. J.; SUI, F. Control of flexural waves on a beam using distributed vibration neutralisers. *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, n. 12, p. 2758–2771, jun. 2011. ISSN 0022-460X. Citado na página 12.
- HINKE, L.; MACE, B. R.; BRENNAN, M. J. Finite element analysis of waveguides. 2004. Disponível em: <<https://eprints.soton.ac.uk/28129/>>. Citado 3 vezes nas páginas iv, 2 e 16.
- KALKOWSKI, M. K.; MUGGLETON, J. M.; RUSTIGHI, E. An experimental approach for the determination of axial and flexural wavenumbers in circular exponentially tapered bars. *Journal of Sound and Vibration*, v. 390, p. 67–85, mar. 2017. ISSN 0022460X. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X1630551X>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 54.
- MEIROVITCH, L. *Fundamentals of vibrations*. Mgh. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 2001. ISBN 978-0-07-041345-0. Citado na página 7.
- OLIVEIRA, A. Análise de incerteza em vigas com ressonadores periodicamente distribuídos. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 46.
- RAO, S. S. *Mechanical Vibrations*. 5. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2010. ISBN 978-0-13-212819-3. Citado 2 vezes nas páginas iv e 7.
- SHIN, K.; HAMMOND, P. J. *Fundamentals of Signal Processing for Sound and Vibration Engineers*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 978-0-470-51188-6. Citado 3 vezes nas páginas 12, 14 e 18.
- SILVA, T. A. L. d. Investigação experimental dos efeitos da variabilidade de fabricação em metamateriais acústicos. abr. 2017. Disponível em: <<http://bdm.unb.br/handle/10483/16618>>. Citado na página 33.

SOUZA, M. R.; FERGUSON, N. S. Identification of bending stiffness via wavenumber estimation and Bayes inference. abr. 2018. Citado na página 21.

SUGINO, C. et al. A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures. *Journal of Sound and Vibration*, v. 406, n. Supplement C, p. 104–123, out. 2017. ISSN 0022-460X. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 64.

THITE, A. N.; FERGUSON, N. S. Wavenumber estimation: Further study of the correlation technique and use of SVD to improve propagation direction resolution. 2004. Disponível em: <<https://eprints.soton.ac.uk/27989/1/Pub2698.pdf>>. Citado na página 2.

TRAVI, M. S. EXPERIMENTAL STUDY OF THE DYNAMIC BEHAVIOR OF A BEAM WITH SPATIALLY CORRELATED MASSES FOR DIFFERENT RANDOM FIELD MODELS. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia - RIPE*, v. 2, n. 16, p. 32–41, jan. 2017. Disponível em: <<http://periodicos.unb.br/index.php/ripe/article/view/23930>>. Citado na página 33.

## Apêndices

# A Análise modal de uma viga com ressonadores periodicamente distribuídos

Este apêndice apresenta uma formulação, baseada em (SUGINO, 2017), para a função resposta em frequência de uma viga com ressonadores periodicamente distribuídos através dos modos de vibrar da uma estrutura.

Assumido a seguinte equação do movimento para um sistema contínuo com  $S$  ressonadores acoplados e distribuídos periodicamente pela estrutura

$$L(x)w(x, t) + \mu \ddot{w}(x, t) - \sum_{p=1}^S k_p u_p(t) \delta(x - x_p) = p(x, t), \quad (\text{A.1})$$

e para os ressonadores

$$m_p \ddot{u}_p(t) + k_p u_p(t) + m_p \ddot{w}(x_p, t) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Assumindo  $N$  modos de vibração  $w(x, t) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) y_j(t)$  para a Eq. A.1

$$\sum_{j=1}^N L(x) \phi_j(x) y_j(t) + \mu \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \ddot{y}_j(t) - \sum_{p=1}^S k_p u_p(t) \delta(x - x_p) = p(x, t), \quad (\text{A.3})$$

Normalizando pela massa e pela rigidez

$$\int_0^L \mu \phi_j(x) \phi_i(x) dx = \delta_{i,j} \quad e \quad \int_0^L L(x) \phi_j(x) \phi_i(x) dx = \omega_j^2 \delta_{i,j}, \quad (\text{A.4})$$

e por fim aplicando as condições de ortogonalidade

$$\ddot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) - \sum_{p=1}^S k_p u_p(t) \phi_j(x_p) = q_j(t) \quad (\text{A.5})$$

onde  $\mathbf{q}_j(t) = \int_0^L \phi_i(x) \mathbf{p}(x, t) dx$ . Assumindo resposta harmônica de forma que  $\mathbf{y}_j(t) = \mathbf{Y}_j e^{i\omega t}$ ,  $\mathbf{u}_p(t) = \mathbf{U}_p e^{i\omega t}$  e  $\mathbf{p}(x, t) = \mathbf{F} \delta(x - x_e) e^{i\omega t}$ , então

$$(\omega_j^2 - \omega^2) \mathbf{Y}_j - \sum_{p=1}^S \mathbf{k}_p \mathbf{U}_p \phi_j(x_p) = \mathbf{Q}_j \quad (\text{A.6})$$

onde  $\mathbf{Q}_j = \mathbf{F} \phi_j(x_e)$ .

Da Eq. A.2 referente aos ressonadores,

$$-\omega^2 \mathbf{m}_p \mathbf{U}_p + \mathbf{k}_p \mathbf{U}_p - \omega^2 \mathbf{m}_p \sum_{i=1}^N \phi_i(x_p) \mathbf{Y}_i = \mathbf{0} \quad (\text{A.7})$$

resultando em

$$\mathbf{U}_p = \frac{\omega^2 \mathbf{m}_p}{\mathbf{k}_p - \omega^2 \mathbf{m}_p} \sum_{i=1}^N \phi_i(x_p) \mathbf{Y}_i = \frac{\omega^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \sum_{i=1}^N \phi_i(x_p) \mathbf{Y}_i. \quad (\text{A.8})$$

Substituindo a Eq. A.8 na Eq. A.6, chega-se em

$$(\omega_j^2 - \omega^2) \mathbf{Y}_j - \sum_{p=1}^S \mathbf{k}_p \phi_j(x_p) \frac{\omega^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \sum_{i=1}^N \phi_i(x_p) \mathbf{Y}_i = \mathbf{Q}_j. \quad (\text{A.9})$$

Pela definição,  $\omega_p^2 = \frac{k_p}{m_p}$  e assumindo uma razão de massa entre os ressonadores e a estrutura  $\mathbf{m}_p = \epsilon \mu \Delta l$ , então

$$(\omega_j^2 - \omega^2) \mathbf{Y}_j - \sum_{p=1}^S \epsilon \mu \Delta l \omega_p^2 \phi_j(x_p) \frac{\omega^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \sum_{i=1}^N \phi_i(x_p) \mathbf{Y}_i = \mathbf{Q}_j. \quad (\text{A.10})$$

Organizando os termos

$$(\omega_j^2 - \omega^2) \mathbf{Y}_j - \epsilon \omega^2 \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^S \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \mu \phi_j(x_p) \phi_i(x_p) \Delta l \mathbf{Y}_i = \mathbf{Q}_j \quad (\text{A.11})$$

Assumindo que todos os ressonadores são idênticos, chega-se em

$$(\omega_j^2 - \omega^2) \mathbf{Y}_j - \epsilon \omega^2 \sum_{i=1}^N \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \left( \sum_{p=1}^S \mu \phi_j(x_p) \phi_i(x_p) \Delta l \right) \mathbf{Y}_i = \mathbf{Q}_j. \quad (\text{A.12})$$

Assumindo um número grande o suficiente de ressonadores, i.e

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^S \mu \phi_j(x_p) \phi_i(x_p) \Delta l \approx \int_0^L \mu \phi_j(x) \phi_i(x) dx = \delta_{i,j} \quad (\text{A.13})$$

Fazendo essa aproximação simplificamos a Eq. A.12 para

$$(\omega_j^2 - \omega^2)Y_j - \epsilon\omega^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2} Y_j = Q_j, \quad (\text{A.14})$$

Chegando á coordenada modal

$$Y_j = \frac{Q_j}{(\omega_j^2 - \omega^2) - \epsilon \frac{\omega^2 \omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2}}, \quad (\text{A.15})$$

que pode, por fim, ser expresso em coordenadas físicas como

$$\frac{w(\mathbf{x}_r, \omega)}{F(\mathbf{x}_e, \omega)} = \alpha_{re}(\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{\phi_j(\mathbf{x}_r)\phi_j(\mathbf{x}_e)}{\omega_j^2 - \omega^2 \left(1 + \epsilon \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2}\right)} \quad (\text{A.16})$$



# B Resposta forçada utilizando propagação de ondas

## B.1 Equação da onda

Este apêndice apresenta uma formulação para cálculo da resposta forçada em estruturas a partir de uma abordagem de propagação de ondas. O comportamento de uma viga pode ser descrito em termos de amplitudes de ondas, como mostrado na Fig.B.1.

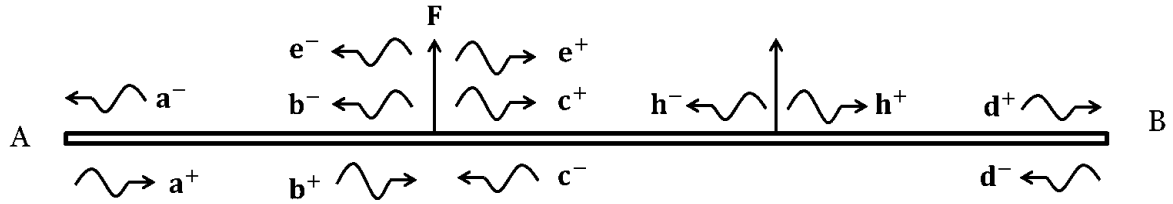


Figura B.1 – Amplitudes de ondas em uma viga.

Os tipos de esforços aplicados à uma estrutura definem os tipos de ondas que irão se propagar na estrutura. Para o caso de uma viga, com esforços de flexão, são gerados dois tipos de onda, uma propagante e uma evanescente, que se deslocam nos sentidos positivo e negativo. Os deslocamentos em qualquer ponto da estrutura podem ser definidos pela soma das amplitudes e da fase das ondas naquele ponto, através da relação

$$w(x) = a^+ e^{-ikx} + a_N^+ e^{-kx} + a^- e^{ikx} + a_N^- e^{kx}, \quad (\text{B.1})$$

Onde as constantes  $a^+$  e  $a^-$  são as amplitudes das ondas propagantes que se deslocam para os sentidos positivo e negativo respectivamente, e  $a_N^+$  e  $a_N^-$  das ondas evanescentes.

A partir da Eq. B.1 , pode-se definir as relações entre as amplitudes das ondas e o deslocamento angular, a força cortante e o momento fletor. Esse conjunto de equações são utilizados para determinar as amplitudes das ondas geradas por uma excitação e as matrizes de reflexão nos contornos da estrutura, a partir das análise de equilíbrio e continuidade,

$$\begin{aligned}
w(x) &= a^+ e^{-ikx} + a_N^+ e^{-kx} + a^- e^{ikx} + a_N^- e^{kx} \quad [m] \\
\frac{\partial w(x)}{\partial x} &= \theta(x) = -ika^+ e^{-ikx} - ka_N^+ e^{-kx} + ik a^- e^{ikx} + k a_N^- e^{kx} \quad [rad] \\
EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} &= M(x) = -k^2 a^+ e^{-ikx} + k^2 a_N^+ e^{-kx} - k^2 a^- e^{ikx} + k^2 a_N^- e^{kx} \quad [Nm] \\
EI \frac{\partial^3 w(x)}{\partial x^3} &= V(x) = ik^3 a^+ e^{-ikx} - k^3 a_N^+ e^{-kx} - ik^3 a^- e^{ikx} + k^3 a_N^- e^{kx} \quad [N].
\end{aligned}$$

O número de onda  $k$  define em quanto a fase da onda muda ao se propagar por  $x$   $m$ . Dessa forma, com a determinação da curva de dispersão é possível também calcular os deslocamentos em qualquer ponto da estrutura, dada uma excitação, sem a necessidade de medir experimentalmente todos os pontos.

### B.1.1 Viga em balanço

Por exemplo, para uma viga em balanço sujeita à uma excitação harmônica do tipo  $F(t) = F_0 \exp(i\omega t)$ , podemos determinar as amplitudes das ondas propagantes e evanescentes geradas por esse forçamento, utilizando o conjunto de equações citado acima, e separando o ponto de aplicação da força em  $w^-(x)$  e  $w^+(x)$ , e que o ponto de aplicação da força é em  $x = 0$ .

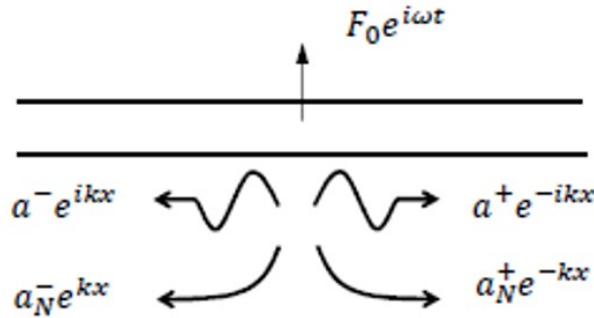


Figura B.2 – Ondas geradas por um forçamento harmônico aplicado a uma viga.

$$\begin{aligned}
a^+ + a_N^+ &= a^- + a_N^- \\
-ika^+ - ka_N^+ &= ik a^- + k a_N^- \\
-k^2 a^+ + k^2 a_N^+ &= -k^2 a^- + k^2 a_N^- \\
EI(ik^3 a^+ - k^3 a_N^+) &= EI(-ik^3 a^- + k^3 a_N^-) + F.
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtêm-se um sistema com quatro equações e quatro incógnitas, resolvendo o sistema, chega-se aos valores de  $a^+$ ,  $a_N^+$ ,  $a^-$  e  $a_N^-$

$$\begin{aligned} a^+ &= a^- = \frac{-iF}{4EI k^3} \\ a_N^+ &= a_N^- = \frac{-F}{4EI k^3} \end{aligned}$$

Em seguida, é preciso determinar as matrizes de reflexão nos contornos, no caso, uma extremidade engastada e a outra livre.

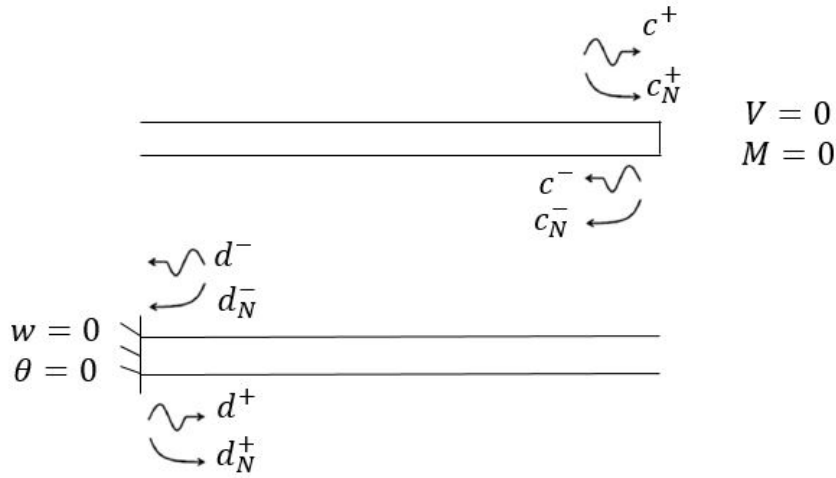


Figura B.3 – Condições de contorno.

Novamente, à partir das equações de continuidade e equilíbrio é possível determinar as matrizes de reflexão dos contornos, dadas por

$$r_L = \begin{bmatrix} -i & -1-i \\ -1+i & i \end{bmatrix} \quad r_R = \begin{bmatrix} -i & 1+i \\ 1-i & i \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Com as amplitudes das ondas geradas e as matrizes de reflexão determinadas, é possível determinar a função resposta em frequência em qualquer ponto da estrutura. A Fig. B.4 mostra as amplitudes das ondas propagando na estrutura e a relação de mudança de fase entre elas.

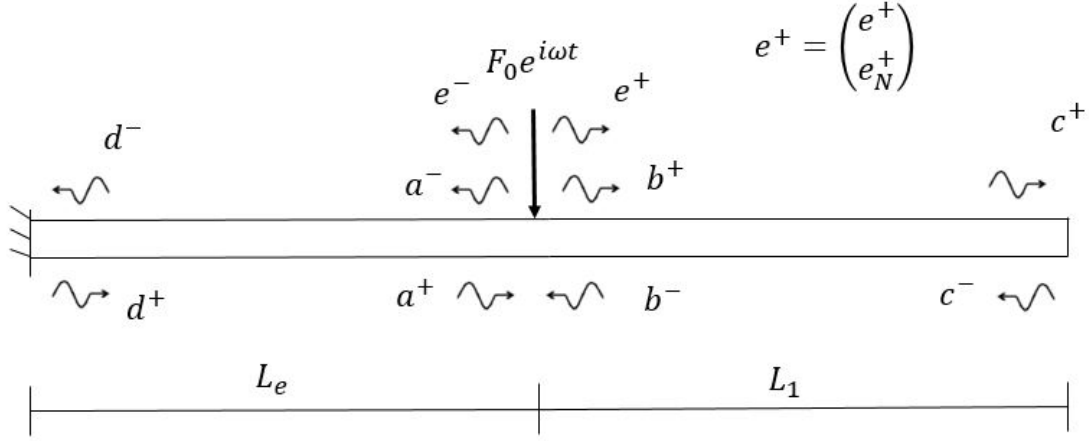


Figura B.4 – Modelo das ondas presentes em uma estrutura.

A análise consiste em avaliar quanto de mudança de fase a onda sofreu ao se propagar pela estrutura e ao se refletir nos contornos até atingir o ponto de interesse. O deslocamento total no ponto é dado pela soma da amplitude de todas as ondas presentes.

Dessa forma, se quisermos determinar a receptância de entrada, precisamos determinar as amplitudes das ondas  $b^+$  e  $b^-$  a partir das ondas geradas.

Pelas relações de equilíbrio e continuidade, tem-se que a amplitude da onda que está saindo do ponto é igual a amplitude da onda que está entrando somada a amplitude da onda que está sendo gerada, de forma que

$$\begin{aligned} b^+ &= a^+ + e^+ \\ a^- &= b^- + e^- \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

As mudanças de fase na amplitude da onda propagante é dada pela exponencial complexa  $e^{-ikx}$  e para onda evanescente pela exponencial real  $e^{-kx}$ , logo podemos relacionar a mudança de fase de uma onda pela matriz de propagação definida como

$$\lambda(x) = \begin{bmatrix} e^{-ikx} & 0 \\ 0 & e^{-kx} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Lembrando que tanto ondas propagantes como evanescentes estão presentes na estrutura de forma que a amplitude de uma onda pode ser escrito como um vetor com uma componente propagante e outra evanescente como

$$b^+ = \begin{bmatrix} b^+ \\ b_N^+ \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

A amplitude da onda  $d^-$  é igual a amplitude da onda  $a^-$  com uma mudança de

fase de  $\mathbf{kL}_e$ , logo é possível relacioná-las pela igualdade

$$\mathbf{d}^- = \lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{a}^-. \quad (\text{B.6})$$

Já a amplitude da onda  $\mathbf{d}^+$  é determinada pela mudança de fase causa pela reflexão da onda  $\mathbf{d}^-$ , multiplicando-a pela matriz de reflexão  $\mathbf{r}_L$

$$\mathbf{d}^+ = \mathbf{r}_L\mathbf{d}^- \quad (\text{B.7})$$

De maneira análoga, chega-se às seguintes relações

$$\mathbf{a}^+ = \lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{d}^+ \quad (\text{B.8})$$

Substituindo as Eqs. B.6 e B.7 na Eq. B.8 obtêm-se

$$\mathbf{a}^+ = \lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{r}_L\lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{a}^- \quad (\text{B.9})$$

Substituindo a Eq. B.9 nas Eqs. B.3 resulta em

$$\mathbf{b}^+ = \lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{r}_L\lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{a}^- + \mathbf{e}^+ \quad (\text{B.10})$$

e

$$\mathbf{b}^+ = \lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{r}_L\lambda(\mathbf{L}_e)(\mathbf{b}^- + \mathbf{e}^-) + \mathbf{e}^+ \quad (\text{B.11})$$

Relacionando agora  $\mathbf{b}^-$  com  $\mathbf{b}^+$ , utilizando a mesma análise, têm-se

$$\mathbf{b}^- = \lambda(\mathbf{L}_1)\mathbf{r}_R\lambda(\mathbf{L}_1)\mathbf{b}^+ \quad (\text{B.12})$$

Substituindo a Eq. B.12 na Eq. B.11,

$$\mathbf{b}^+ = \lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{r}_L\lambda(\mathbf{L}_e)\lambda(\mathbf{L}_1)\mathbf{r}_R\lambda(\mathbf{L}_1)\mathbf{b}^+ + \lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{r}_L\lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{e}^- + \mathbf{e}^+ \quad (\text{B.13})$$

Lembrando que  $\lambda(\mathbf{L}_e)\lambda(\mathbf{L}_1) = \lambda(\mathbf{L})$ , e reescrevendo a Eq. B.13

$$\mathbf{b}^+ - \lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{r}_L\lambda(\mathbf{L})\mathbf{r}_R\lambda(\mathbf{L}_1)\mathbf{b}^+ = \lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{r}_L\lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{e}^- + \mathbf{e}^+ \quad (\text{B.14})$$

Por fim, isolando-se o vetor  $\mathbf{b}^+$ , o resultado é

$$\mathbf{b}^+ = (\mathbf{I} - \lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{r}_L\lambda(\mathbf{L})\mathbf{r}_R\lambda(\mathbf{L}_1))^{-1} (\lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{r}_L\lambda(\mathbf{L}_e)\mathbf{e}^- + \mathbf{e}^+) \quad (\text{B.15})$$

Para determinar a amplitude de  $\mathbf{b}^-$ , basta fazer o caminho inverso até  $\mathbf{b}^+$

$$\mathbf{b}^- = \lambda(L_1) r_R \lambda(L_1) \mathbf{b}^+ \quad (\text{B.16})$$

Logo, a amplitude total no ponto de excitação é dado por

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{b}^+ + \mathbf{b}_N^+ + \mathbf{b}^- + \mathbf{b}_N^-, \quad (\text{B.17})$$

e a receptância de entrada por

$$\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{F}} = \alpha(\omega) = \frac{\mathbf{b}^+ + \mathbf{b}_N^+ + \mathbf{b}^- + \mathbf{b}_N^-}{\mathbf{F}} \quad (\text{B.18})$$

Com essa análise, basta determinar a curva de dispersão e as matrizes de reflexão e a resposta em qualquer ponto da estrutura pode ser determinada.

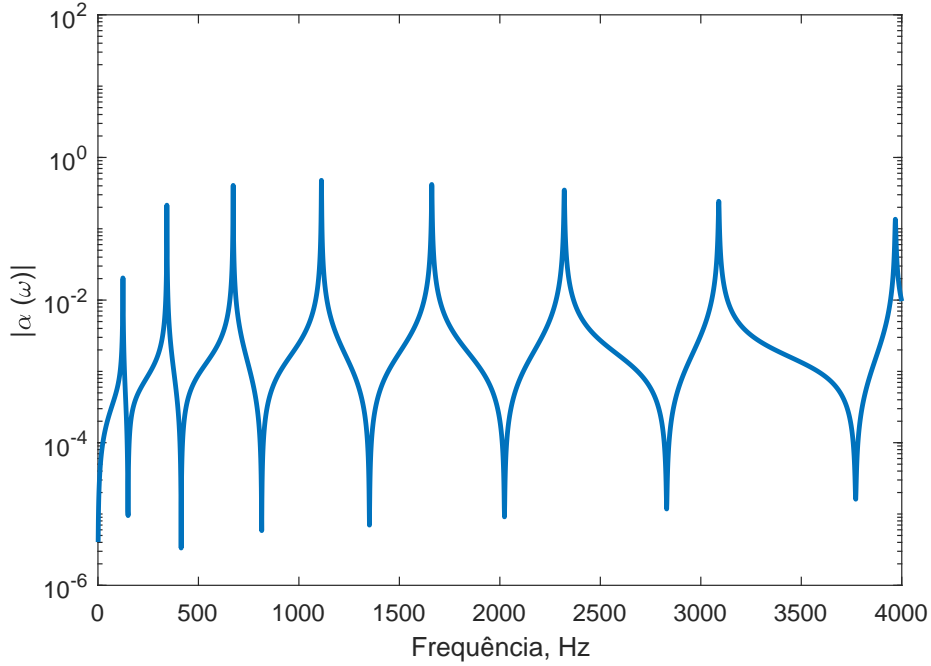


Figura B.5 – Receptância de entrada para uma viga engastada-livre, obtida via análise de propagação de ondas.